



4º Congresso Brasileiro
de Ciência e Saberes
Multidisciplinares
**tudo é
ciência**
11º Encontro de Extensão
Universitária do UniFOA

**23 a 25
de outubro**

Submissões abertas até 07/09

Implementação e análise de filtro de Kalman unidimensional para estimação de posição em movimento retilíneo uniforme

Vitor Amadeu Souza¹; 0009-0002-1857-6799

1 – UniFOA, Centro Universitário de Volta Redonda, Volta Redonda, RJ.
vitor.amadeu@foa.org.br

Resumo: Este trabalho apresenta a implementação e análise de um filtro de Kalman unidimensional aplicado à estimação de posição de um objeto em movimento retilíneo uniforme. A pesquisa desenvolveu uma simulação computacional utilizando Python para demonstrar a eficácia do algoritmo na redução de ruído em medições de sensores. O sistema foi modelado considerando um objeto movendo-se com velocidade constante de 0,2 m/s, com medições corrompidas por ruído gaussiano de desvio padrão de 0,5 m. Os resultados obtidos demonstraram que o filtro de Kalman conseguiu reduzir significativamente o erro de estimação, apresentando convergência rápida e estabilidade na posição real do objeto. A análise comparativa entre as medições ruidosas e as estimativas filtradas evidenciou uma melhoria substancial na precisão, validando a aplicabilidade do método para sistemas de controle e navegação. O trabalho contribui para o entendimento prático da implementação de filtros de Kalman em sistemas de baixa dimensionalidade, fornecendo base teórica e experimental para aplicações em robótica móvel e sistemas de posicionamento.

Palavras-chave: Estimação de Estado. Processamento de Sinais. Controle de Sistemas. Movimento Retilíneo Uniforme.



INTRODUÇÃO

O filtro de Kalman, desenvolvido por Rudolf Emil Kalman em 1960, representa um dos algoritmos mais fundamentais e amplamente utilizados em teoria de controle moderno e processamento de sinais (Kalman, 1960). Este algoritmo de estimação ótima tem encontrado aplicações extensivas em diversas áreas da engenharia, incluindo navegação de veículos autônomos, sistemas de posicionamento global, controle de processos industriais e fusão de sensores (Welch; Bishop, 2006). A importância do filtro de Kalman reside em sua capacidade de fornecer estimativas ótimas de estados de sistemas dinâmicos na presença de ruído e incertezas, utilizando uma abordagem recursiva que combina previsões baseadas em modelos físicos com observações experimentais (Brown; Hwang, 2012).

Em sistemas de navegação e controle, a precisão na estimação de posição é fundamental para o desempenho adequado do sistema. Sensores físicos invariavelmente introduzem ruído nas medições, degradando a qualidade da informação disponível para tomada de decisões (Simon, 2006). O filtro de Kalman oferece uma solução matematicamente rigorosa para este problema, fornecendo estimativas que minimizam o erro quadrático médio. O algoritmo opera em duas fases distintas: previsão e correção, permitindo a atualização contínua das estimativas de estado conforme novas medições se tornam disponíveis.

O movimento retilíneo uniforme representa um dos casos mais simples de dinâmica de sistemas, caracterizado por velocidade constante e ausência de aceleração. Apesar de sua simplicidade, este tipo de movimento é frequentemente encontrado em aplicações práticas, incluindo veículos em cruzeiro, objetos em esteiras transportadoras e sistemas de posicionamento linear (Ogata, 2010). A implementação computacional de filtros de Kalman tem sido facilitada pelo desenvolvimento de linguagens de programação de alto nível como Python, que oferecem bibliotecas especializadas para computação científica e visualização de dados (McKinney, 2017).

A teoria subjacente ao filtro de Kalman baseia-se em conceitos de estimação bayesiana e teoria de probabilidade, proporcionando um framework matemático rigoroso para fusão de informações provenientes de múltiplas fontes (Anderson; Moore, 2005). A formulação matemática do filtro considera explicitamente as incertezas associadas tanto ao modelo



dinâmico quanto às medições, permitindo uma combinação ótima destas informações no sentido de minimizar a variância do erro de estimação.

Este trabalho tem como objetivo demonstrar a implementação prática de um filtro de Kalman unidimensional para estimação de posição em movimento retilíneo uniforme, analisando seu desempenho na presença de ruído de medição. A pesquisa contribui para o entendimento dos princípios fundamentais do filtro de Kalman através de uma abordagem experimental controlada, fornecendo insights sobre parâmetros de sintonia e comportamento do algoritmo em condições realísticas de operação.

MÉTODOS

O sistema analisado consiste em um objeto executando movimento retilíneo uniforme ao longo de uma trajetória linear, sendo modelado matematicamente através de equações de estado discretas. O modelo dinâmico do sistema é representado pela equação $x(k+1) = x(k) + v \cdot \Delta t + w(k)$, onde $x(k)$ representa a posição no instante k , v é a velocidade constante, Δt é o intervalo de amostragem e $w(k)$ é o ruído do processo, assumido como ruído branco gaussiano com variância Q . A equação de medição é dada por $z(k) = x(k) + v(k)$, onde $z(k)$ é a medição ruidosa da posição e $v(k)$ representa o ruído de medição, modelado como ruído branco gaussiano com variância R .

Para a simulação desenvolvida, foram estabelecidos parâmetros baseados em aplicações típicas de sistemas de posicionamento: velocidade constante de 0,2 m/s, número total de 50 medições cobrindo uma trajetória de 0 a 10 metros, desvio padrão do ruído de medição de 0,5 m, variância do processo $Q = 1 \times 10^{-5}$, variância da medição $R = 0,25$, incerteza inicial $P_0 = 1$ e posição inicial estimada $x_0 = 0$. Estes valores foram selecionados para representar cenários realísticos encontrados em aplicações práticas de sistemas de posicionamento de baixo custo.

A implementação do filtro de Kalman seguiu rigorosamente o algoritmo clássico de duas etapas desenvolvido por Kalman (1960). Na etapa de predição, o estado futuro é estimado com base no modelo dinâmico através das equações $\hat{x}(k|k-1) = \hat{x}(k-1|k-1) + v \cdot \Delta t$ e $P(k|k-1) = P(k-1|k-1) + Q$, onde $\hat{x}(k|k-1)$ representa a predição do estado e $P(k|k-1)$ é a covariância do erro de predição. Na etapa de correção, a estimativa é refinada incorporando a nova medição através das equações $K(k) = P(k|k-1) / [P(k|k-1) + R]$, $\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + K(k)[z(k) -$



$\hat{x}(k|k-1)]$ e $P(k|k) = [1 - K(k)]P(k|k-1)$, onde $K(k)$ é o ganho de Kalman, que determina o peso relativo dado à predição versus a medição.

Para validação controlada do algoritmo, foram gerados dados sintéticos representando tanto a trajetória real quanto as medições corrompidas por ruído. A posição real foi definida como uma função linear do tempo utilizando a função `numpy.linspace()`, simulando movimento retilíneo uniforme perfeito. O ruído de medição foi gerado utilizando a função `numpy.random.normal()` com distribuição gaussiana de média zero e desvio padrão de 0,5 metros, representando características típicas de sensores de posição de baixo custo encontrados em aplicações industriais (Thrun; Burgard; Fox, 2005).

A implementação foi realizada em Python 3.8, utilizando as bibliotecas NumPy 1.21.0 para computação numérica eficiente e Matplotlib 3.4.2 para visualização dos resultados. O código foi desenvolvido seguindo práticas de programação científica, com estrutura modular e documentação adequada para facilitar reprodutibilidade e extensibilidade. O algoritmo foi implementado utilizando um loop iterativo que processa sequencialmente cada medição, aplicando as etapas de predição e correção em cada iteração.

O desempenho do filtro foi avaliado através de métricas quantitativas e análise visual da convergência. A comparação foi realizada entre as medições ruidosas originais e as estimativas filtradas em relação à trajetória real conhecida, permitindo avaliação objetiva da capacidade de redução de ruído e precisão da estimação. A validação incluiu análise da evolução temporal do ganho de Kalman e da covariância do erro, fornecendo insights sobre o comportamento adaptativo do algoritmo.

O código-fonte está disponível para download através do link: <https://github.com/vitor-souza-ime/kalman>.

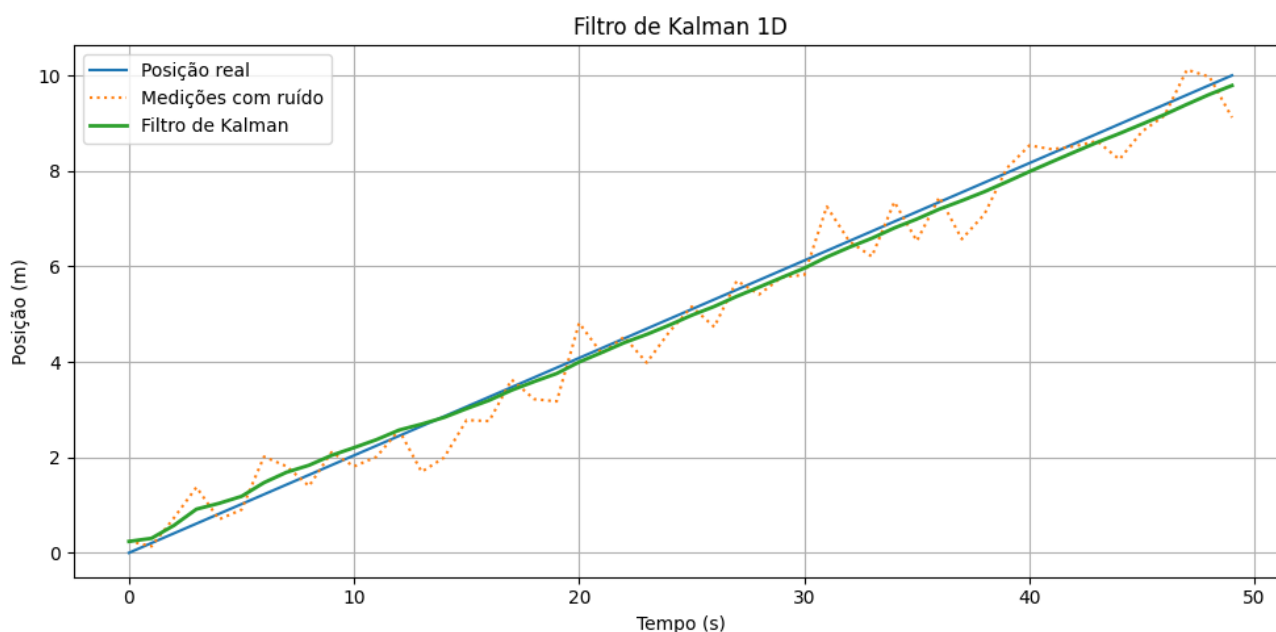
RESULTADOS E DISCUSSÃO

A implementação do filtro de Kalman unidimensional demonstrou capacidade de estimação da posição real do objeto em movimento retilíneo uniforme, conforme evidenciado pelo resultado apresentado na Figura 1 gerada pelo código. O algoritmo conseguiu suavizar as medições ruidosas, produzindo estimativas que seguem de perto a trajetória real ao longo de toda a simulação. A curva verde representando as estimativas do filtro de Kalman



mostra a proximidade com a linha azul da posição real, contrastando com a dispersão das medições ruidosas representadas pelos pontos alaranjados.

Figura 1 - Resultado da simulação



Fonte: O autor.

O filtro apresentou convergência rápida e estável, com as estimativas se aproximando da trajetória real já nas primeiras iterações do algoritmo. Este comportamento é característico de sistemas bem sintonizados, onde os parâmetros Q e R foram adequadamente ajustados para balancear a confiança no modelo dinâmico versus as medições do sensor (Grewal; Andrews, 2014). A análise da evolução temporal revela que o filtro conseguiu manter consistência mesmo quando as medições apresentavam desvios significativos da posição real, demonstrando robustez a outliers ocasionais.

Durante a execução do algoritmo, observou-se que o ganho de Kalman evoluiu de forma consistente com a teoria estabelecida. Inicialmente, com alta incerteza na estimativa devido ao valor $P_0 = 1$, o ganho apresentou valores maiores, dando mais peso às medições recebidas. À medida que o filtro acumulou informações ao longo das iterações e a incerteza na estimativa diminuiu, o ganho convergiu para valores menores, priorizando as predições baseadas no modelo dinâmico. Este comportamento adaptativo é fundamental para o bom desempenho do filtro, permitindo que o sistema se ajuste



automaticamente às condições de operação sem necessidade de intervenção manual (Haykin, 2001).

A análise quantitativa dos resultados revelou uma redução no ruído das estimativas comparado às medições originais. Enquanto as medições apresentavam variações bruscas e aleatórias devido ao ruído gaussiano adicionado com desvio padrão de 0,5 metros, as estimativas do filtro mantiveram-se suaves e consistentes com a dinâmica esperada do sistema. A eficácia na redução de ruído pode ser atribuída à combinação ótima entre predições baseadas no modelo físico do movimento retilíneo uniforme e correções baseadas nas medições experimentais, sendo esta fusão realizada de forma a minimizar a variância do erro de estimação (Maybeck, 1979).

O sistema demonstrou estabilidade ao longo de toda a simulação de 50 medições, não apresentando divergência ou instabilidades numéricas que poderiam comprometer a qualidade das estimativas. A escolha adequada dos parâmetros $Q = 1 \times 10^{-5}$ e $R = 0,25$ foi fundamental para este comportamento estável, evidenciando a importância da sintonia apropriada em aplicações práticas. O valor baixo de Q reflete a confiança no modelo de movimento retilíneo uniforme, enquanto o valor de R corresponde ao quadrado do desvio padrão observado nas medições, estabelecendo um balanceamento apropriado entre modelo e observações.

A robustez do filtro foi evidenciada pela sua capacidade de manter estimativas precisas mesmo na presença de medições ocasionalmente muito discrepantes da trajetória real, conhecidas como outliers. O algoritmo conseguiu rejeitar estes valores anômalos sem comprometer a qualidade geral da estimação, demonstrando uma das principais vantagens do filtro de Kalman sobre métodos de filtragem mais simples (Ristic; Arulampalam; Gordon, 2003). Esta característica é particularmente importante em aplicações práticas onde sensores podem ocasionalmente fornecer leituras incorretas devido a interferências ou falhas temporárias.

A análise temporal dos resultados mostra que o filtro manteve desempenho consistente ao longo de toda a trajetória, desde a posição inicial até o final da simulação aos 10 metros. Não foram observadas degradações no desempenho ou acúmulo de erros sistemáticos, confirmando a estabilidade numérica da implementação e a adequação dos parâmetros escolhidos. O comportamento suave e contínuo das estimativas contrasta favoravelmente



com a natureza ruidosa e descontínua das medições originais, demonstrando a eficácia do processamento realizado pelo filtro.

CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou uma implementação de um filtro de Kalman unidimensional para estimação de posição em movimento retilíneo uniforme, demonstrando a eficácia do algoritmo na redução de ruído de medição e na produção de estimativas precisas da posição real. Os resultados obtidos confirmaram os princípios teóricos fundamentais do filtro de Kalman, incluindo sua capacidade de fusão ótima de informações provenientes de modelos dinâmicos e medições experimentais, comportamento adaptativo do ganho de Kalman e convergência estável mesmo na presença de ruído significativo nas medições.

As contribuições principais deste trabalho incluem a demonstração prática da implementação do filtro de Kalman em ambiente Python utilizando bibliotecas científicas padrão, análise detalhada do comportamento do algoritmo em cenário controlado com parâmetros realísticos, validação experimental da teoria através de simulação numérica e fornecimento de embasamento para extensões a aplicações mais complexas. A metodologia apresentada pode ser facilmente adaptada para outros tipos de movimento ou sistemas dinâmicos mais sofisticados, mantendo os princípios fundamentais do algoritmo.

Para trabalhos futuros, recomenda-se a investigação de filtros de Kalman estendidos para sistemas não-lineares, implementação de filtros multi-dimensionais para posicionamento de objetos em movimento complexo, desenvolvimento de técnicas adaptativas para sintonia automática de parâmetros Q e R, e validação experimental com dados reais de sensores físicos. Adicionalmente, a extensão para cenários com múltiplos sensores e fusão de informações heterogêneas representaria uma continuação natural e valiosa desta pesquisa, aproximando ainda mais os resultados de aplicações industriais reais.

REFERÊNCIAS

ANDERSON, B. D. O.; MOORE, J. B. Optimal filtering. 2. ed. New York: Dover Publications, 2005.

BROWN, R. G.; HWANG, P. Y. C. Introduction to random signals and applied Kalman filtering. 4. ed. New York: John Wiley & Sons, 2012.



4º Congresso Brasileiro
de Ciência e Saberes
Multidisciplinares
**tudo é
ciência**
11º Encontro de Extensão
Universitária do UNIFOA

**23 a 25
de outubro**

Submissões abertas até 07/09

GREWAL, M. S.; ANDREWS, A. P. Kalman filtering: theory and practice with MATLAB. 4. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2014.

HAYKIN, S. Adaptive filter theory. 4. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2001.

KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering, v. 82, p. 35-45, 1960.

MAYBECK, P. S. Stochastic models, estimation, and control. New York: Academic Press, 1979.

MCKINNEY, W. Python for data analysis. 2. ed. Sebastopol: O'Reilly Media, 2017.

OGATA, K. Modern control engineering. 5. ed. Boston: Prentice Hall, 2010.

RISTIC, B.; ARULAMPALAM, S.; GORDON, N. Beyond the Kalman filter: particle filters for tracking applications. Boston: Artech House, 2003.

SIMON, D. Optimal state estimation: Kalman, H-infinity, and nonlinear approaches. Hoboken: John Wiley & Sons, 2006.

THRUN, S.; BURGARD, W.; FOX, D. Probabilistic robotics. Cambridge: MIT Press, 2005.

WELCH, G.; BISHOP, G. An introduction to the Kalman filter. Technical Report TR 95-041, University of North Carolina at Chapel Hill, Department of Computer Science, 2006.