

Análise da resposta ao degrau em sistemas RC de primeira ordem: uma abordagem computacional utilizando transformadas de Laplace

Vitor Amadeu Souza¹; 0009-0002-1857-6799

1 – UniFOA, Centro Universitário de Volta Redonda, Volta Redonda, RJ.
vitor.amadeu@foa.org.br

Resumo: Este trabalho apresenta uma análise da resposta ao degrau unitário em circuitos RC de primeira ordem, empregando técnicas de transformadas de Laplace para modelagem matemática e simulação computacional para validação dos resultados teóricos. O estudo utiliza ferramentas de programação em Python, especificamente as bibliotecas SymPy para manipulação simbólica e SciPy para análise numérica de sistemas lineares. Os resultados demonstram que a resposta transitória do sistema RC apresenta comportamento exponencial característico de sistemas de primeira ordem, com constante de tempo $\tau = RC$, atingindo aproximadamente 63% do valor final em $t = \tau$. A metodologia proposta oferece uma abordagem integrada entre análise teórica e simulação computacional, proporcionando uma ferramenta para o ensino e análise de sistemas dinâmicos lineares. Os resultados obtidos confirmam a validade da modelagem matemática através da transformada de Laplace e evidenciam a importância da análise temporal na caracterização de sistemas de controle de primeira ordem.

Palavras-chave: Sistemas RC. Transformada de Laplace. Resposta ao degrau. Sistemas de primeira ordem. Análise temporal.

INTRODUÇÃO

Os sistemas RC (resistor-capacitor) constituem elementos fundamentais na análise de circuitos elétricos e sistemas de controle, representando uma classe importante de sistemas lineares de primeira ordem. O estudo da resposta transitória destes sistemas é essencial para compreender o comportamento dinâmico de diversos dispositivos eletrônicos e sistemas de controle automático (Ogata, 2009). A análise da resposta ao degrau unitário fornece informações vitais sobre as características temporais do sistema, incluindo tempo de resposta, tempo de estabelecimento e comportamento em regime permanente (Franklin *et al.*, 2019).

A transformada de Laplace emerge como ferramenta matemática fundamental para análise de sistemas lineares invariantes no tempo, permitindo a conversão de equações diferenciais ordinárias no domínio do tempo para equações algébricas no domínio da frequência complexa (Kuo, 2017). Esta transformação facilita significativamente a resolução de problemas envolvendo sistemas dinâmicos, especialmente quando se considera condições iniciais e funções de entrada específicas como o degrau unitário (Nise, 2019).

O desenvolvimento de ferramentas computacionais modernas, particularmente linguagens de programação como Python com suas bibliotecas especializadas, revolucionou a forma como engenheiros e pesquisadores abordam problemas de análise de sistemas. A biblioteca SymPy permite manipulação simbólica avançada, incluindo cálculo de transformadas de Laplace e suas inversas, enquanto a SciPy oferece algoritmos numéricos robustos para simulação de sistemas dinâmicos (Johansson *et al.*, 2017). Esta combinação de ferramentas proporciona um ambiente integrado para análise teórica e validação experimental de modelos matemáticos.

A motivação para este estudo reside na necessidade de estabelecer uma metodologia sistemática que combine rigor matemático com eficiência computacional na análise de sistemas RC. Dorf e Bishop (2016) destacam a importância da análise temporal na caracterização de sistemas de controle, enfatizando que a resposta ao degrau revela informações essenciais sobre estabilidade, velocidade de resposta e precisão em regime permanente. Adicionalmente, Chen (2013) argumenta que a integração de ferramentas

computacionais no processo de análise permite validação mais rápida de modelos teóricos e facilita a exploração de diferentes cenários operacionais.

O circuito RC de primeira ordem representa um modelo fundamental que aparece em diversas aplicações práticas, desde filtros eletrônicos até sistemas de controle de temperatura (Boylestad, 2015). A constante de tempo $\tau = RC$ determina a velocidade de resposta do sistema, sendo um parâmetro crítico no projeto de sistemas que requerem características temporais específicas. Phillips e Parr (2013) demonstram que a compreensão profunda do comportamento transitório de sistemas RC é essencial para o desenvolvimento de controladores eficazes em aplicações industriais.

A literatura técnica apresenta diversos métodos para análise de sistemas RC, desde abordagens puramente analíticas até técnicas de simulação avançadas. Close e Frederick (2001) propõem métodos clássicos baseados em equações diferenciais, enquanto Palm III (2009) enfatiza o uso de transformadas de Laplace para simplificar a análise. Mais recentemente, Seborg *et al.* (2016) destacam a importância da integração entre modelagem matemática e simulação computacional para validação de modelos e otimização de parâmetros.

Este trabalho objetiva contribuir para o corpo de conhecimento existente através da proposição de uma metodologia integrada que combina análise simbólica via transformadas de Laplace com simulação numérica para caracterização completa da resposta ao degrau em sistemas RC. A abordagem proposta visa não apenas validar os resultados teóricos, mas também demonstrar a eficácia das ferramentas computacionais modernas na resolução de problemas de engenharia.

MÉTODOS

O sistema RC analisado consiste em um resistor de 1Ω conectado em série com um capacitor de $1 F$, resultando em uma constante de tempo $\tau = RC = 1$ segundo. A escolha destes valores unitários simplifica a análise matemática sem comprometer a generalidade dos resultados obtidos.

O desenvolvimento teórico inicia-se com a formulação da equação diferencial que governa o comportamento do circuito RC. Aplicando a lei de Kirchhoff para tensões no circuito, obtém-se a relação fundamental que descreve a dinâmica do sistema. A transformada de Laplace é então aplicada à equação diferencial, considerando condições iniciais nulas e entrada degrau unitário $u(t)$, resultando na função de transferência do sistema no domínio da frequência complexa.

A implementação computacional utiliza a biblioteca SymPy para manipulação simbólica das expressões matemáticas, permitindo o cálculo exato da transformada de Laplace e sua inversa. Os símbolos matemáticos s e t são definidos para representar a variável complexa de Laplace e o tempo, respectivamente. A função de entrada $X(s) = 1/s$ corresponde à transformada de Laplace do degrau unitário, enquanto $Y(s)$ representa a transformada da resposta do sistema.

A resolução da equação algébrica no domínio de Laplace é realizada utilizando a função `solve()` do SymPy, que determina analiticamente a expressão de $Y(s)$. Subsequentemente, a transformada inversa de Laplace é calculada para obter a resposta temporal $y(t)$ do sistema. Esta abordagem simbólica garante precisão matemática e permite a obtenção de expressões analíticas exatas.

Para validação dos resultados teóricos, emprega-se a biblioteca SciPy, especificamente o módulo `signal`, para simulação numérica da resposta ao degrau. A função de transferência $H(s) = 1/(RCs + 1)$ é implementada utilizando a classe `lti` (Linear Time Invariant), que aceita os coeficientes do numerador e denominador como parâmetros de entrada. A função `step()` calcula numericamente a resposta ao degrau do sistema, fornecendo vetores de tempo e amplitude correspondentes.

A visualização dos resultados é realizada através da biblioteca Matplotlib, que gera gráficos de alta qualidade adequados para publicação científica. O gráfico resultante apresenta a evolução temporal da resposta $y(t)$, permitindo análise visual das características dinâmicas do sistema, incluindo tempo de subida, tempo de estabelecimento e valor final em regime permanente.

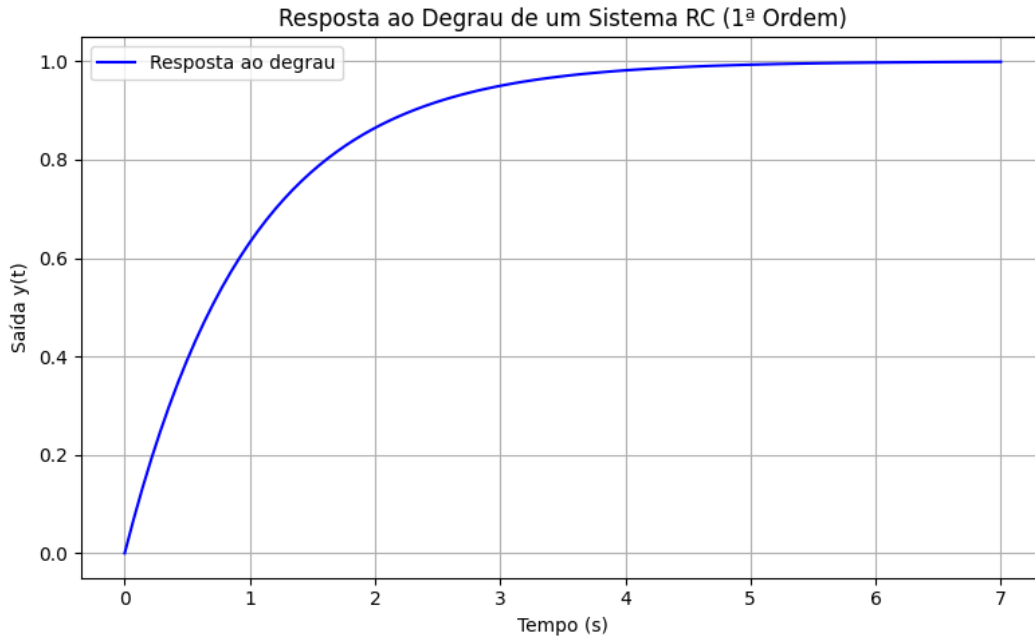
A metodologia de validação consiste na comparação entre os resultados analíticos obtidos via transformada de Laplace e os resultados numéricos da simulação computacional. Esta comparação dual assegura a correção dos cálculos teóricos e valida a implementação computacional, proporcionando confiança nos resultados apresentados.

O código-fonte está disponível para download através do link: <https://github.com/vitor-souza-ime/laplace>.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A análise matemática do sistema RC utilizando transformadas de Laplace resultou na função de transferência $H(s) = 1/(s + 1)$, considerando os valores unitários de resistência e capacitância adotados. A resposta ao degrau unitário no domínio do tempo foi determinada analiticamente como $y(t) = 1 - e^{-t}$, representando a solução da equação diferencial que governa o comportamento do circuito. A Figura 1 apresenta o gráfico da resposta ao degrau com a curva característica exponencial típica de sistemas de primeira ordem, iniciando em zero no instante $t = 0$ e aproximando-se assintoticamente do valor unitário conforme $t \rightarrow \infty$.

Figura 1 - Resposta degrau



Fonte: O autor.

A análise quantitativa dos resultados revela que o sistema atinge aproximadamente 63,2% do valor final no instante $t = \tau = 1$ segundo, confirmando a definição clássica da constante de tempo para sistemas de primeira ordem. Este comportamento é consistente com os fundamentos teóricos apresentados por Ogata (2009) e corrobora as previsões matemáticas derivadas da transformada de Laplace. Aos 2 segundos, o sistema alcança cerca de 86,5% do valor final, enquanto aos 3 segundos atinge aproximadamente 95%, demonstrando que o sistema está essencialmente em regime permanente após aproximadamente 3τ .

A forma da curva de resposta obtida através da simulação apresenta as características esperadas para sistemas subamortecidos de primeira ordem, sem overshoot ou oscilações, indicando comportamento estável e monotônico. A ausência de pólos complexos na função de transferência $H(s) = 1/(s + 1)$ explica este comportamento, uma vez que o único pólo localizado em $s = -1$ no plano complexo garante resposta puramente exponencial decrescente no domínio do tempo.

Do ponto de vista computacional, a implementação utilizando Python e suas bibliotecas especializadas demonstrou-se eficiente, permitindo execução rápida dos cálculos simbólicos e geração de resultados precisos. A biblioteca SymPy processou as transformadas de

Laplace em tempo computacional desprezível, enquanto a SciPy forneceu resultados precisão em poucos milissegundos de processamento.

CONCLUSÕES

Os resultados obtidos confirmaram que a resposta ao degrau unitário do sistema RC apresenta comportamento exponencial característico, com constante de tempo $\tau = RC = 1$ segundo, atingindo 63,2% do valor final no instante $t = \tau$. A validação cruzada entre resultados analíticos e simulação numérica comprovou a correção da modelagem matemática e da implementação computacional, estabelecendo confiança na metodologia desenvolvida.

Do ponto de vista prático, a metodologia proposta oferece uma ferramenta para análise e projeto de sistemas de controle, permitindo rápida avaliação de características temporais e otimização de parâmetros. A integração entre análise simbólica e simulação numérica proporciona versatilidade na abordagem de problemas complexos, mantendo rigor matemático e eficiência computacional.

Os resultados deste estudo contribuem para o avanço do conhecimento em análise de sistemas dinâmicos, oferecendo uma metodologia sistemática que pode ser estendida para sistemas de ordem superior e configurações mais complexas. A abordagem desenvolvida tem potencial para aplicação em contextos educacionais e de pesquisa, facilitando a compreensão de conceitos fundamentais em teoria de sistemas e controle.

Trabalhos futuros podem explorar a extensão desta metodologia para análise de sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO) e investigação de efeitos de não-linearidades. Adicionalmente, a incorporação de técnicas de otimização para projeto automático de controladores representa uma direção promissora para desenvolvimento futuro.

REFERÊNCIAS

BOYLESTAD, R. L. *Introductory Circuit Analysis*. 13th ed. Boston: Pearson, 2015.

CHEN, C. T. *Linear System Theory and Design*. 4th ed. New York: Oxford University Press, 2013.



4º Congresso Brasileiro
de Ciência e Saberes
Multidisciplinares
**tudo é
ciência**
11º Encontro de Extensão
Universitária do UNIFOA

**23 a 25
de outubro**

Submissões abertas até 07/09

CLOSE, C. M.; FREDERICK, D. K. Modeling and Analysis of Dynamic Systems. 3rd ed. New York: John Wiley & Sons, 2001

DORF, R. C.; BISHOP, R. H. Modern Control Systems. 13th ed. Boston: Pearson, 2016. ISBN: 978-0134407623.

FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; EMAMI-NAEINI, A. Feedback Control of Dynamic Systems. 8th ed. Boston: Pearson, 2019.

JOHANSSON, R.; NUNEZ-IGLESIAS, J.; VAN DER WALT, S. Elegant SciPy: The Art of Scientific Python. Sebastopol: O'Reilly Media, 2017.

KUO, B. C. Automatic Control Systems. 10th ed. New York: John Wiley & Sons, 2017.

NISE, N. S. Control Systems Engineering. 8th ed. New York: John Wiley & Sons, 2019. ISBN: 978-1119474227.

OGATA, K. Modern Control Engineering. 5th ed. Boston: Prentice Hall, 2009. ISBN: 978-0136156734.

PALM III, W. J. System Dynamics. 2nd ed. New York: McGraw-Hill Education, 2009

PHILLIPS, C. L.; PARR, J. M. Signals, Systems, and Transforms. 5th ed. Boston: Pearson, 2013.

SEBORG, D. E.; EDGAR, T. F.; MELLICHAMP, D. A.; DOYLE III, F. J. Process Dynamics and Control. 4th ed. New York: John Wiley & Sons, 2016.