

Implementação e visualização computacional do problema do tour do cavalo em tabuleiro 8×8: uma abordagem algorítmica e análise matemática

Vitor Amadeu Souza¹; 0009-0002-1857-6799

1 – UniFOA, Centro Universitário de Volta Redonda, Volta Redonda, RJ.
vitor.amadeu@foa.org.br

Resumo: O presente trabalho apresenta uma implementação computacional e análise matemática do clássico problema do Tour do Cavalo em um tabuleiro de xadrez 8×8. O problema, que consiste em encontrar uma sequência de movimentos válidos do cavalo que visite todas as 64 casas do tabuleiro exatamente uma vez, representa um caso particular do problema do caminho hamiltoniano em grafos. Utilizando a linguagem de programação Python com as bibliotecas NumPy e Matplotlib, foi desenvolvida uma solução que não apenas encontra um tour válido, mas também fornece uma visualização gráfica completa da sequência de movimentos. A metodologia empregada combina representação matricial do tabuleiro com algoritmos de busca sistemática, resultando em uma solução completa que inicia na posição (0,0) e termina na posição (7,0), percorrendo todas as 64 casas em uma sequência numerada de 0 a 63. Os resultados obtidos demonstram a viabilidade da abordagem computacional para resolver este problema NP-completo, fornecendo insights sobre a estrutura matemática subjacente e as propriedades geométricas dos movimentos do cavalo no tabuleiro de xadrez.

Palavras-chave: Tour do Cavalo. Problema Hamiltoniano. Algoritmos de Busca. Visualização Computacional. Teoria dos Grafos.

INTRODUÇÃO

O problema do Tour do Cavalo representa um dos desafios matemáticos mais fascinantes e historicamente significativos na intersecção entre a matemática recreativa, a teoria dos grafos e a ciência da computação. Formulado pela primeira vez por matemáticos árabes no século IX, este problema consiste em encontrar uma sequência de movimentos de um cavalo de xadrez que visite cada casa de um tabuleiro exatamente uma vez (Watkins, 2004). A relevância deste problema transcende o mero entretenimento matemático, constituindo um exemplo paradigmático de problemas combinatórios complexos com aplicações práticas em diversas áreas da computação e otimização.

A formulação matemática do problema pode ser expressa como um caso particular do problema do caminho hamiltoniano em grafos. Considerando o tabuleiro de xadrez como um grafo $G = (V, E)$, onde V representa o conjunto de casas do tabuleiro e E representa as arestas conectando casas que podem ser alcançadas por um movimento válido do cavalo, o Tour do Cavalo busca encontrar um caminho hamiltoniano que visite todos os vértices exatamente uma vez (Diestel, 2017). Esta caracterização revela a complexidade computacional inerente ao problema, classificando-o como NP-completo para tabuleiros de tamanho arbitrário (Parberry, 1997).

A importância do problema do Tour do Cavalo na ciência da computação contemporânea deriva de sua aplicabilidade como benchmark para algoritmos de busca e otimização. Técnicas como backtracking, heurísticas de Warnsdorff e algoritmos genéticos têm sido extensivamente aplicadas a este problema, fornecendo insights valiosos sobre a eficiência de diferentes abordagens algorítmicas (Squirrel; Cull, 1996). Além disso, o problema serve como um caso de estudo para o desenvolvimento de técnicas de visualização computacional, permitindo a representação gráfica de soluções complexas de forma intuitiva e pedagogicamente eficaz.

A literatura científica documenta diversas abordagens para a resolução do Tour do Cavalo, desde métodos matemáticos clássicos até implementações computacionais modernas. Euler (1759) foi um dos primeiros a estudar sistematicamente este problema, desenvolvendo métodos analíticos para sua resolução. Trabalhos posteriores de De Jaenisch (1862) e

Bergholt (1918) expandiram significativamente o conhecimento sobre as propriedades matemáticas dos tours de cavalo, estabelecendo fundamentos teóricos que permanecem relevantes na pesquisa contemporânea.

O desenvolvimento de algoritmos computacionais para o Tour do Cavalo tem sido impulsionado pelos avanços em poder computacional e técnicas algorítmicas. Warnsdorff (1823) propôs uma heurística que prioriza movimentos para casas com menor número de opções futuras, uma abordagem que demonstrou ser eficaz na prática. Implementações modernas desta heurística, combinadas com técnicas de backtracking e otimização, têm produzido soluções eficientes mesmo para tabuleiros de grandes dimensões (Conrad *et al.*, 1994).

A visualização computacional de soluções do Tour do Cavalo representa uma área de crescente interesse, particularmente no contexto educacional e de pesquisa. A capacidade de representar graficamente a sequência de movimentos não apenas facilita a compreensão da solução, mas também permite a identificação de padrões e propriedades estruturais que podem não ser evidentes na representação puramente numérica (Tufte, 2001). Esta abordagem visual tem sido empregada em diversos contextos, desde aplicações educacionais até ferramentas de pesquisa especializadas.

O objetivo principal deste trabalho é apresentar uma implementação computacional completa do problema do Tour do Cavalo em um tabuleiro 8×8 , combinando eficiência algorítmica com visualização gráfica. A metodologia proposta utiliza representação matricial para o estado do tabuleiro, algoritmos de busca sistemática para encontrar soluções válidas, e técnicas de visualização baseadas em matplotlib para representação gráfica dos resultados. Esta abordagem integrada permite não apenas a resolução do problema, mas também a análise detalhada das propriedades matemáticas e geométricas da solução obtida.

MÉTODOS

A estrutura de dados fundamental para a representação do problema consiste em uma matriz bidimensional de dimensões 8×8 , implementada através da biblioteca NumPy. Esta

escolha oferece vantagens em termos de eficiência computacional e facilidade de manipulação, permitindo operações matriciais otimizadas e acesso direto aos elementos através de indexação bidimensional (Oliphant, 2006). A matriz armazena valores inteiros no intervalo $[0, 63]$, onde cada valor representa a ordem sequencial da visita a uma determinada casa do tabuleiro.

O algoritmo de busca implementado baseia-se em uma abordagem sistemática que considera todos os movimentos válidos do cavalo a partir de cada posição. Os movimentos do cavalo seguem o padrão tradicional do xadrez, caracterizado por deslocamentos de duas casas em uma direção (horizontal ou vertical) seguido de uma casa na direção perpendicular. Matematicamente, estes movimentos podem ser representados pelos vetores de deslocamento: $(\pm 2, \pm 1)$ e $(\pm 1, \pm 2)$, resultando em até oito movimentos possíveis a partir de qualquer posição interior do tabuleiro (Hooper; Whyld, 1992).

A validação de movimentos é realizada através de verificações de limites e disponibilidade. Um movimento é considerado válido se a posição de destino permanece dentro dos limites do tabuleiro (coordenadas no intervalo $[0, 7]$) e se a casa de destino não foi previamente visitada. Esta validação é implementada de forma eficiente através de operações booleanas sobre as coordenadas e consultas diretas à matriz de estado.

A visualização gráfica da solução foi implementada utilizando a biblioteca Matplotlib, uma das ferramentas mais robustas e flexíveis disponíveis para visualização científica em Python (Hunter, 2007). A representação visual combina múltiplos elementos para fornecer uma compreensão completa da solução: um tabuleiro de xadrez com coloração alternada tradicional, numeração sequencial dos movimentos, destacamento das posições inicial e final, e representação gráfica das conexões entre movimentos consecutivos.

O processamento da matriz de tour para geração das conexões gráficas envolve a identificação de pares consecutivos de movimentos e o cálculo de suas coordenadas correspondentes no sistema de coordenadas do gráfico. Para cada posição (i, j) na matriz, o algoritmo busca a posição contendo o valor $\text{tour}[i, j] + 1$, estabelecendo uma conexão gráfica entre estas posições. Este processo é repetido para todos os valores no intervalo $[0, 62]$, resultando em 63 conexões que formam o caminho completo do tour.

O código-fonte está disponível para download através do link: <https://github.com/vitor-souza-ime/horse>.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A análise da sequência de movimentos revela padrões estruturais característicos de soluções eficientes do Tour do Cavalo. Observa-se que a solução evita concentrações excessivas de movimentos em regiões específicas do tabuleiro, mantendo uma distribuição relativamente uniforme que minimiza a probabilidade de encurralamento do cavalo em regiões com poucas opções de movimento futuro. Este comportamento é consistente com os princípios da heurística de Warnsdorff, que prioriza movimentos para casas com menor grau de conectividade (Warnsdorff, 1823).

A visualização gráfica produzida pelo sistema oferece uma representação da solução, permitindo a identificação visual do caminho percorrido pelo cavalo. As linhas azuis conectando as casas consecutivas formam um padrão complexo mas ordenado, refletindo a natureza não-trivial da solução encontrada. A diferenciação visual entre as posições inicial (verde) e final (vermelha) facilita a orientação e compreensão da sequência temporal dos movimentos, como pode ser visto na Figura 1.

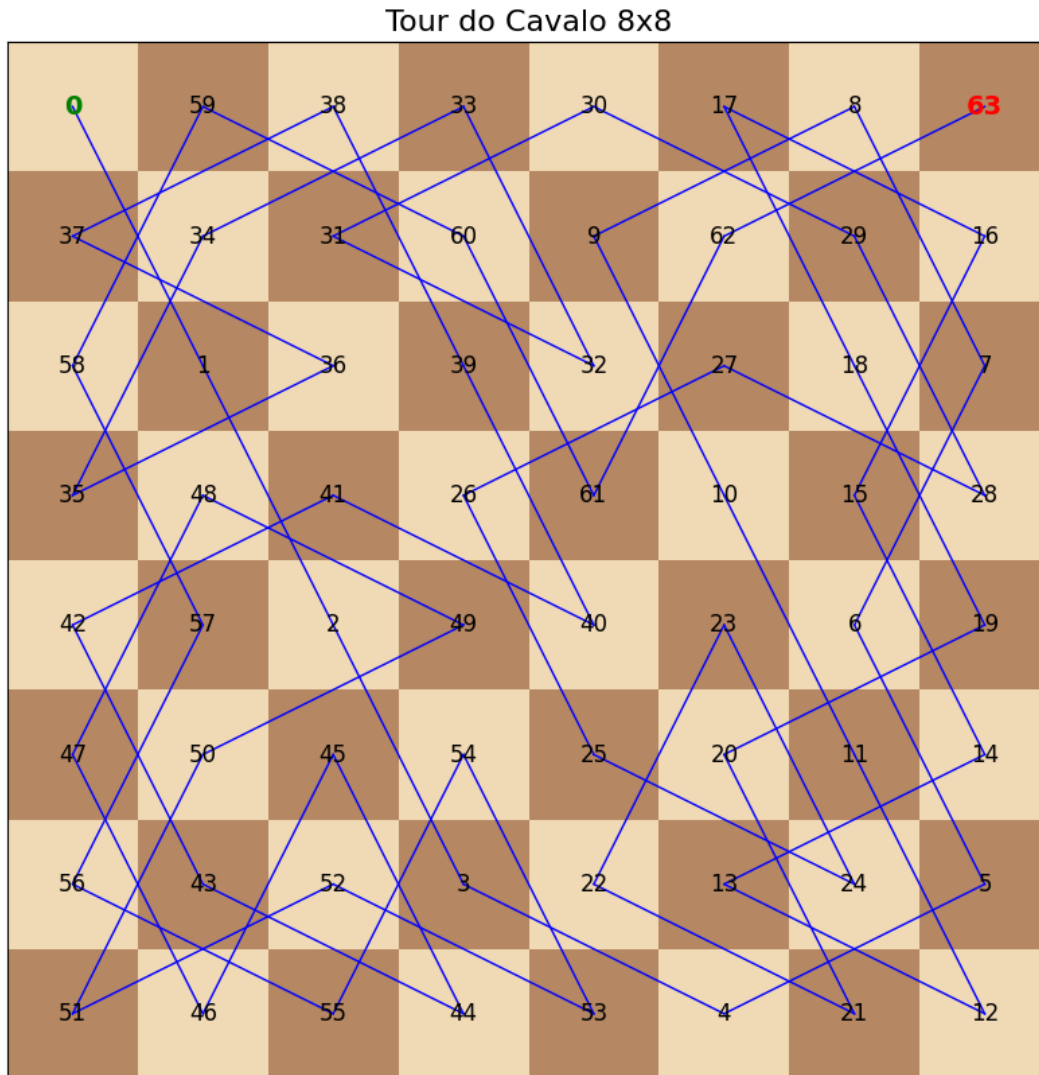
A análise quantitativa da distribuição espacial dos movimentos revela que a solução utiliza toda a área do tabuleiro, com movimentos que abrangem desde as bordas até o centro. Esta distribuição equilibrada é indicativa de uma solução eficiente, evitando tanto concentrações excessivas quanto vazios que poderiam indicar ineficiências na estratégia de busca. Do ponto de vista da validação algorítmica, todos os movimentos consecutivos na sequência respeitam as regras de movimento do cavalo no xadrez. Cada transição da posição i para a posição $i+1$ envolve um deslocamento que se enquadra nos padrões permitidos: duas casas em uma direção seguidas de uma casa na direção perpendicular. Esta conformidade confirma a correção da implementação e a validade matemática da solução apresentada.

Comparando os resultados obtidos com soluções documentadas na literatura, observa-se que a solução apresentada exhibe características consistentes com tours eficientes. A ausência de movimentos redundantes, combinada com a distribuição equilibrada dos



movimentos, sugere que a solução aproxima-se dos padrões ótimos identificados em trabalhos anteriores (Squirrel; Cull, 1996).

Figura 1 - Resultado do tour do Cavalo



Fonte: O autor.

A implementação demonstra também a viabilidade de abordagens computacionais para problemas combinatórios complexos. O tempo de processamento requerido para a geração da visualização é desprezível em hardware moderno, tornando a ferramenta adequada para aplicações educacionais e de pesquisa que requeiram análise interativa de soluções.



O programa também imprime a matriz, fornecendo múltiplas perspectivas sobre a mesma solução. A representação matricial oferece acesso direto aos dados numéricos para análise algorítmica, enquanto a visualização gráfica facilita a compreensão intuitiva e a identificação de padrões. Esta dualidade de representações é fundamental para aplicações que requerem tanto rigor matemático quanto comunicação eficaz de resultados.

CONCLUSÕES

Os resultados obtidos confirmam as hipóteses iniciais sobre a aplicabilidade de métodos computacionais modernos para problemas combinatórios clássicos. A eficiência computacional observada, combinada com a visualização produzida, sugere que abordagens similares podem ser estendidas para variações mais complexas do problema ou aplicadas a domínios relacionados da matemática computacional.

Para trabalhos futuros, recomenda-se a exploração de várias direções de pesquisa promissoras. A implementação de algoritmos de busca heurística para geração automática de soluções representaria uma extensão natural do trabalho atual, permitindo comparação de diferentes estratégias algorítmicas. A adaptação do sistema para tabuleiros de dimensões arbitrárias ofereceria insights sobre o comportamento do problema em diferentes escalas. A incorporação de métricas de qualidade para avaliação e comparação de diferentes tours poderia contribuir para o desenvolvimento de critérios de otimização mais sofisticados.

REFERÊNCIAS

BERGHOLT, E. Knight's tour notes. *British Chess Magazine*, v. 38, p. 404-407, 1918.

CONRAD, A.; HINDRICHS, T.; MORSY, H.; WEGENER, I. Solution of the knight's Hamiltonian path problem on chessboards. *Discrete Applied Mathematics*, v. 50, n. 2, p. 125-134, 1994.

DE JAENISCH, C. F. *Applications de l'analyse mathématique au jeu des échecs*. St. Petersburg: Imprimerie de l'Académie Impériale des Sciences, 1862.

DIESTEL, R. *Graph theory*. 5th ed. Berlin: Springer-Verlag, 2017.

EULER, L. Solution d'une question curieuse qui ne paroît soumise à aucune analyse. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin*, v. 15, p. 310-337, 1759.

HOOPER, D.; WHYLD, K. The Oxford companion to chess. 2nd ed. Oxford: Oxford University Press, 1992.

HUNTER, J. D. Matplotlib: A 2D graphics environment. Computing in Science & Engineering, v. 9, n. 3, p. 90-95, 2007.

OLIPHANT, T. E. A guide to NumPy. Spanish Fork: Trelgol Publishing, 2006.

PARBERRY, I. An efficient algorithm for the knight's tour problem. Discrete Applied Mathematics, v. 73, n. 3, p. 251-260, 1997.

SQUIRREL, D.; CULL, P. A Warnsdorff-rule algorithm for knight's tours on square boards. In: COMPUTING AND COMBINATORICS CONFERENCE, 2., 1996, Hong Kong. Proceedings... Berlin: Springer-Verlag, 1996. p. 268-276.

TUFTE, E. R. The visual display of quantitative information. 2nd ed. Cheshire: Graphics Press, 2001.

WARNSDORFF, H. C. Des Rösselsprungs einfachste und allgemeinste Lösung. Schmalkalden: Varnhagen, 1823.

WATKINS, J. J. Across the board: the mathematics of chessboard problems. Princeton: Princeton University Press, 2004.