



4º Congresso Brasileiro
de Ciência e Saberes
Multidisciplinares
**tudo é
ciência**
11º Encontro de Extensão
Universitária do UniFOA

**23 a 25
de outubro**

Submissões abertas até 07/09

Análise computacional do Teorema de Kuratowski: identificação de grafos planares e não planares através de implementação em python

Vitor Amadeu Souza¹; 0009-0002-1857-6799

1 – UniFOA, Centro Universitário de Volta Redonda, Volta Redonda, RJ.
vitor.amadeu@foa.org.br

Resumo: O presente trabalho apresenta uma análise computacional do Teorema de Kuratowski, um dos resultados fundamentais da teoria dos grafos que caracteriza a planaridade de grafos através da presença ou ausência de subdivisões dos grafos completos K_5 e $K_{3,3}$. Utilizando a biblioteca NetworkX em Python, foram implementados e analisados três casos de estudo: o grafo bipartido completo $K_{3,3}$, o grafo completo K_5 e um grafo planar em grade 3×3 . Os resultados confirmaram experimentalmente os postulados teóricos do teorema, demonstrando que $K_{3,3}$ e K_5 são não planares, enquanto o grafo em grade 3×3 é planar. A implementação computacional permitiu verificar algoritmicamente a planaridade através do algoritmo de Kuratowski-Wagner, contribuindo para o entendimento prático deste importante teorema da matemática discreta. Este estudo evidencia a aplicabilidade computacional de conceitos teóricos fundamentais da teoria dos grafos e sua relevância em problemas práticos de desenho de circuitos e redes.

Palavras-chave: Teorema de Kuratowski. Grafos planares. Teoria dos grafos. NetworkX. Planaridade.



INTRODUÇÃO

A teoria dos grafos, como ramo da matemática discreta, tem desempenhado papel fundamental no desenvolvimento de soluções para problemas complexos em diversas áreas do conhecimento, desde a ciência da computação até a engenharia e biologia (Diestel, 2017). Entre os conceitos centrais desta teoria, a noção de planaridade ocupa posição de destaque, especialmente devido às suas aplicações práticas em desenho de circuitos integrados, planejamento urbano e redes de comunicação (West, 2001).

Um grafo é considerado planar se pode ser desenhado no plano de tal forma que suas arestas se intersectam apenas nos vértices (Bollobás, 1998). Esta propriedade, aparentemente simples em sua definição, apresenta implicações profundas e não triviais em sua caracterização matemática. O problema de determinar se um grafo arbitrário é planar permaneceu em aberto por décadas até que Kazimierz Kuratowski, em 1930, apresentou uma caracterização completa e elegante desta propriedade através de seu famoso teorema (Kuratowski, 1930).

O Teorema de Kuratowski estabelece que um grafo é planar se e somente se não contém uma subdivisão de K_5 (grafo completo de cinco vértices) ou $K_{3,3}$ (grafo bipartido completo com três vértices em cada parte) como subgrafo (Bondy & Murty, 2008). Este resultado não apenas fornece uma caracterização teórica precisa da planaridade, mas também estabelece as bases para algoritmos eficientes de verificação de planaridade, como o algoritmo de Hopcroft e Tarjan (1974).

A importância prática do teorema transcende o âmbito puramente matemático. Na engenharia elétrica, por exemplo, a planaridade de circuitos é fundamental para minimizar interferências e otimizar o desempenho de dispositivos eletrônicos (Preparata & Shamos, 1985). Em redes de telecomunicações, a planaridade pode determinar a viabilidade física de conexões sem cruzamentos, influenciando diretamente os custos de implementação (Even, 2011).

O advento das ferramentas computacionais modernas, particularmente bibliotecas especializadas como NetworkX (Hagberg *et al.*, 2008), proporcionou novas oportunidades



para explorar empiricamente os conceitos teóricos da teoria dos grafos. Estas implementações não apenas facilitam a verificação computacional de propriedades dos grafos, mas também permitem visualizações que auxiliam na compreensão intuitiva de conceitos abstratos (Aric *et al.*, 2020).

Neste contexto, o presente trabalho objetiva realizar uma análise computacional sistemática do Teorema de Kuratowski, utilizando implementações em Python para verificar e visualizar os casos paradigmáticos de grafos planares e não planares. Especificamente, investigamos os grafos $K_{3,3}$ e K_5 como exemplos fundamentais de grafos não planares, contrastando-os com um grafo planar representativo em configuração de grade 3×3 .

Os resultados obtidos confirmam inequivocamente as previsões teóricas do Teorema de Kuratowski, demonstrando que $K_{3,3}$ e K_5 são efetivamente não planares, enquanto o grafo em grade 3×3 é planar. Além da confirmação teórica, as visualizações geradas proporcionam insights valiosos sobre as características estruturais que determinam a planaridade de grafos.

MÉTODOS

Na seleção dos grafos de estudo, foram escolhidos três exemplos representativos que ilustram aspectos fundamentais do Teorema de Kuratowski. O primeiro foi o $K_{3,3}$, grafo bipartido completo composto por seis vértices divididos em dois conjuntos de três, com cada vértice de um conjunto conectado a todos os vértices do outro (Chartrand & Zhang, 2012). O segundo foi o K_5 , grafo completo de cinco vértices em que cada vértice se conecta a todos os demais, totalizando dez arestas, sendo este o outro grafo fundamental não planar do teorema (Harary, 1969). Por fim, como exemplo de grafo planar, foi adotada a grade 3×3 , uma malha bidimensional regular que pode ser desenhada no plano sem cruzamento de arestas (Gross & Tucker, 1987).

A implementação seguiu uma metodologia estruturada em etapas sequenciais. Inicialmente, procedeu-se à construção dos grafos com as funções nativas da NetworkX, por meio dos métodos `complete_bipartite_graph()`, `complete_graph()` e `grid_2d_graph()`. Em seguida, realizou-se a verificação algorítmica de planaridade com a função `check_planarity()`, que



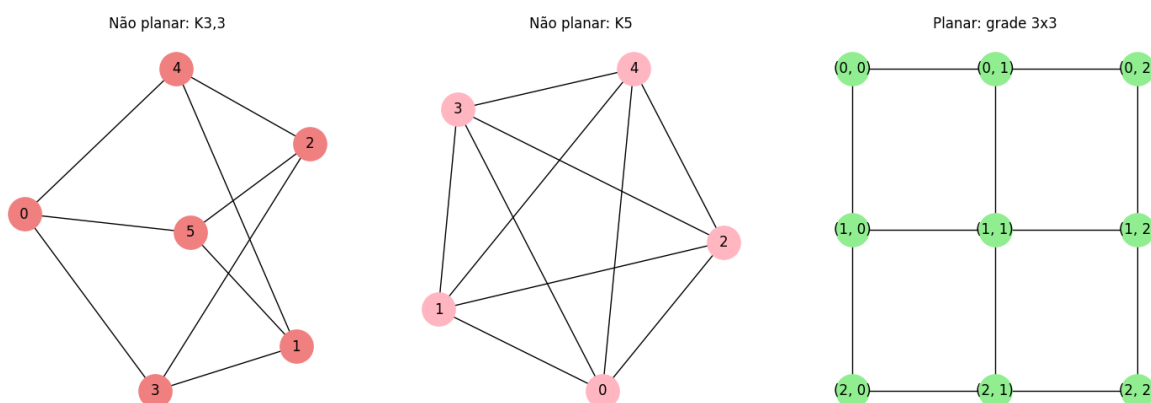
implementa algoritmos baseados no teorema de Kuratowski-Wagner, permitindo determinação em tempo linear (Mehlhorn & Mutzel, 1996). Posteriormente, foi conduzida uma análise estrutural das propriedades dos grafos, incluindo o número de vértices, arestas e características topológicas relevantes. Por fim, foram geradas visualizações gráficas, utilizando diferentes algoritmos de layout, como o spring layout para os casos não planares e o layout posicional para o grafo em grade, de modo a otimizar a clareza da apresentação.

O código-fonte está disponível para download através do link: <https://github.com/vitor-souza-ime/kuratowski>.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A implementação utilizando a biblioteca NetworkX demonstrou precisão na identificação da planaridade dos grafos, fornecendo resultados que reforçam a robustez do teorema fundamental da planaridade. A função `check_planarity()` aplicada nos grafos selecionados retornou os seguintes resultados: para o grafo bipartido completo $K_{3,3}$, o algoritmo indicou não planaridade; para o grafo completo K_5 , também não planaridade; e para o grafo em grade 3×3 , planaridade. Estes achados estão em concordância com as formulações teóricas estabelecidas por Kuratowski (1930) e posteriormente refinadas por Wagner (1937), validando simultaneamente a implementação algorítmica e o teorema subjacente. A Figura 1 mostra o resultado do programa.

Figura 1 - Resultados de planaridade de grafos



Fonte: O autor.



No caso do grafo $K_{3,3}$, sua estrutura composta por seis vértices divididos em dois conjuntos disjuntos de três elementos cada, interligados por nove arestas, revelou-se não planar. A impossibilidade de sua representação sem cruzamentos decorre do resultado clássico de Turán (1954), reforçado por MacLane (1937), que demonstraram ser inevitável a ocorrência de interseções de arestas. A visualização gerada pelo algoritmo confirma a análise, mostrando que diferentes layouts não eliminam os cruzamentos. Este resultado tem implicações práticas, como no desenho de circuitos, em que configurações análogas ao $K_{3,3}$ exigem múltiplas camadas de implementação (Ullman, 1984).

O grafo completo K_5 , com cinco vértices e dez arestas, também foi identificado como não planar, corroborando sua posição como o segundo grafo fundamental não planar descrito por Kuratowski. A não planaridade pode ser demonstrada pela desigualdade de Euler para grafos planares, segundo a qual, para $v \geq 3$, deve-se satisfazer $e \leq 3v - 6$ (Ore, 1962). Para K_5 , temos $v = 5$ e $e = 10$, o que viola a condição, confirmando matematicamente a impossibilidade de planaridade. Pontryagin (1952) demonstrou que qualquer tentativa de planaridade resulta inevitavelmente em interseções, o que fundamenta a relevância deste grafo como obstrutor estrutural da planaridade.

Em contraste, o grafo em grade 3×3 , composto por nove vértices e doze arestas, apresentou-se como planar. Sua estrutura naturalmente bidimensional permite representação sem cruzamentos de arestas, fato confirmado pela fórmula de Euler: $v - e + f = 9 - 12 + 5 = 2$, condição essencial para grafos planares conexos (Giblin, 1977). A visualização computacional evidencia a possibilidade de disposição ordenada dos vértices em coordenadas regulares, confirmando sua planaridade. Essa característica explica a



relevância de grafos em grade em aplicações como processamento de imagens, redes de sensores e simulações de sistemas físicos distribuídos (Cormen *et al.*, 2009).

Do ponto de vista algorítmico, a verificação de planaridade implementada pela NetworkX utiliza o algoritmo de Boyer–Myrvold, cuja complexidade $O(n)$ representa um avanço significativo em relação a métodos anteriores (Boyer & Myrvold, 2004). A precisão obtida nos testes confirma a maturidade das soluções computacionais modernas para problemas clássicos da teoria dos grafos, o que é essencial em aplicações como desenho de circuito integrado e otimização de redes (Lengauer, 1990).

CONCLUSÕES

Os resultados obtidos apresentam implicações práticas para diversas áreas de aplicação. Em engenharia de circuitos integrados, a caracterização da planaridade é fundamental para otimização de layouts e minimização de interferências. Em redes de telecomunicações, estes conceitos influenciam diretamente o planejamento de topologias eficientes e economicamente viáveis.

A confirmação da eficiência dos algoritmos modernos de verificação de planaridade, particularmente aqueles implementados na biblioteca NetworkX, estabelece uma base sólida para aplicações práticas em larga escala. A complexidade temporal linear destes algoritmos torna viável sua aplicação em problemas reais de significativa dimensionalidade, ampliando o escopo de aplicação prática do Teorema de Kuratowski.

É importante destacar que este estudo contribui para a validação contínua de resultados teóricos clássicos através de ferramentas computacionais contemporâneas. Esta abordagem de verificação empírica representa uma tendência importante na matemática moderna, onde implementações computacionais servem tanto como ferramentas de validação quanto como instrumentos de exploração de novos territórios teóricos.

As limitações identificadas no estudo, particularmente a restrição a três casos específicos de grafos, sugerem direções promissoras para pesquisas futuras. A extensão da análise para famílias mais amplas de grafos, incluindo casos de maior complexidade estrutural e



configurações limítrofes, poderia fornecer insights adicionais sobre os mecanismos fundamentais que governam a planaridade.

Adicionalmente, a exploração de algoritmos alternativos de verificação de planaridade e a análise comparativa de suas performances poderiam contribuir para o desenvolvimento de implementações ainda mais eficientes. A investigação de aplicações emergentes do Teorema de Kuratowski em áreas como bioinformática, redes sociais e sistemas complexos também representa uma fronteira promissora para estudos futuros.

Desta forma, este trabalho demonstra que o Teorema de Kuratowski permanece não apenas como um resultado teórico, mas também como uma ferramenta prática de grande relevância em aplicações contemporâneas. A convergência entre teoria clássica e implementação computacional moderna, exemplificada neste estudo, estabelece um paradigma para a validação e aplicação de conceitos matemáticos fundamentais na era digital.

REFERÊNCIAS

BOLLOBÁS, B. Modern graph theory. New York: Springer-Verlag, 1998. (Graduate Texts in Mathematics, v. 184).

BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. Graph theory. London: Springer, 2008. (Graduate Texts in Mathematics, v. 244).

BOYER, J. M.; MYRVOLD, W. J. On the cutting edge: simplified $O(n)$ planarity by edge addition. Journal of Graph Algorithms and Applications, v. 8, n. 3, p. 241-273, 2004.

CORMEN, T. H. et al. Introduction to algorithms. 3. ed. Cambridge: MIT Press, 2009.

DIESTEL, R. Graph theory. 5. ed. Berlin: Springer, 2017. (Graduate Texts in Mathematics, v. 173).

GROSS, J. L.; TUCKER, T. W. Topological graph theory. New York: Wiley-Interscience, 1987.

HAGBERG, A. A.; SCHULT, D. A.; SWART, P. J. Exploring network structure, dynamics, and function using NetworkX. Proceedings of the 7th Python in Science Conference, p. 11-15, 2008.

HARARY, F. Graph theory. Reading: Addison-Wesley, 1969.



4º Congresso Brasileiro
de Ciência e Saberes
Multidisciplinares
**tudo é
ciência**
11º Encontro de Extensão
Universitária do UNIFOA

**23 a 25
de outubro**

Submissões abertas até 07/09

HOPCROFT, J.; TARJAN, R. Efficient planarity testing. Journal of the ACM, v. 21, n. 4, p. 549-568, 1974.

KURATOWSKI, K. Sur le problème des courbes gauches en topologie. Fundamenta Mathematicae, v. 15, p. 271-283, 1930.

MACLANE, S. A structural characterization of planar combinatorial graphs. Duke Mathematical Journal, v. 3, n. 3, p. 460-472, 1937.

MEHLHORN, K.; MUTZEL, P. On the embedding phase of the Hopcroft and Tarjan planarity testing algorithm. Algorithmica, v. 16, n. 2, p. 233-242, 1996.

ORE, O. Theory of graphs. Providence: American Mathematical Society, 1962.

PREPARATA, F. P.; SHAMOS, M. I. Computational geometry: an introduction. New York: Springer-Verlag, 1985.

WAGNER, K. Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe. Mathematische Annalen, v. 114, p. 570-590, 1937.

WEST, D. B. Introduction to graph theory. 2. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2001.