Implementação computacional do problema do carteiro chinês: uma abordagem algorítmica para otimização de rotas em grafos não-eulerianos

Vitor Amadeu Souza[1]; 0009-0002-1857-6799

1 – UniFOA, Centro Universitário de Volta Redonda, Volta Redonda, RJ.
vitor.amadeu@foa.org.br

Resumo: O Problema do Carteiro Chinês (PCC) constitui um dos problemas fundamentais da teoria dos grafos e otimização combinatória, com aplicações práticas em logística, planejamento urbano e sistemas de distribuição. Este trabalho apresenta uma implementação computacional para resolução do PCC em grafos não-eulerianos, utilizando algoritmos de emparelhamento mínimo e busca de caminhos mais curtos. A metodologia proposta foi aplicada a um grafo exemplo de 12 nós representando um sistema de ruas urbanas, onde foram identificados 6 nós com grau ímpar. Através da aplicação do algoritmo de emparelhamento de peso mínimo, foi possível transformar o grafo não-euleriano em um grafo euleriano com um custo adicional de apenas 8 unidades, representando um aumento de 12,7% no peso total do grafo original. Os resultados demonstram a eficácia da abordagem algorítmica proposta, permitindo a obtenção de um circuito euleriano que percorre todas as arestas do grafo pelo menos uma vez, minimizando o custo total da travessia. A implementação desenvolvida em Python utilizando as bibliotecas NetworkX e Matplotlib fornece uma ferramenta robusta para análise e visualização de soluções do PCC, contribuindo para o avanço das técnicas de otimização em problemas de roteamento.

Palavras-chave: Problema do Carteiro Chinês. Teoria dos Grafos. Otimização Combinatória. Algoritmos de Emparelhamento. Grafos Eulerianos.

INTRODUÇÃO

O PCC, introduzido formalmente por Guan (1962), representa um dos problemas clássicos da teoria dos grafos com significativas aplicações práticas em otimização de rotas e planejamento logístico. O problema consiste em encontrar o menor circuito fechado que atravesse todas as arestas de um grafo pelo menos uma vez, retornando ao ponto de partida. Esta formulação tem origem na necessidade prática de um carteiro percorrer todas as ruas de uma região de forma eficiente, minimizando a distância total percorrida.

Do ponto de vista matemático, a solução do PCC está intimamente relacionada com a teoria dos grafos eulerianos. Segundo Fleischner (1990), um grafo conexo possui um circuito euleriano se e somente se todos os seus vértices possuem grau par. Quando esta condição não é satisfeita, torna-se necessário adicionar arestas ao grafo original de forma a tornar todos os vértices pares, minimizando o peso total das arestas adicionadas.

Corberán e Laporte (2014) destacam que as aplicações práticas do PCC estendem-se muito além do problema original do carteiro, abrangendo áreas como inspeção de redes, coleta de lixo, limpeza de ruas, manutenção de infraestrutura urbana e roteamento de veículos.

No contexto da implementação computacional, as bibliotecas modernas de teoria dos grafos, como NetworkX para Python, têm facilitado significativamente a implementação e experimentação com algoritmos relacionados ao PCC. Hagberg *et al*. (2008) descreveram as funcionalidades da NetworkX e sua aplicabilidade em problemas de otimização de grafos, incluindo implementações eficientes de algoritmos de caminhos mínimos e detecção de circuitos eulerianos.

O presente trabalho tem como objetivo principal desenvolver e implementar uma solução computacional completa para o Problema do Carteiro Chinês, aplicando-a a um grafo exemplo representativo de um sistema urbano real. Através desta implementação, busca-se demonstrar a eficácia dos algoritmos clássicos do PCC e fornecer insights sobre sua aplicabilidade prática em problemas de otimização de rotas urbanas.

MÉTODOS

A metodologia desenvolvida neste trabalho tem como base o algoritmo clássico de Edmonds e Johnson (1973), voltado para a resolução do Problema do Carteiro Chinês, cujo objetivo é determinar um circuito fechado de menor custo capaz de percorrer todas as arestas de um grafo pelo menos uma vez. Para validação prática, foi construído um grafo de teste com 12 vértices e 19 arestas, representando um sistema urbano não-euleriano, no qual alguns vértices possuem grau ímpar. O grafo foi modelado como não-direcionado e ponderado, sendo cada peso associado à distância ou ao custo de travessia das ruas, em conformidade com Corberán e Laporte (2014).

O procedimento do algoritmo inicia-se com a identificação dos vértices ímpares, que formam o conjunto T. Em seguida, são calculadas as distâncias mínimas entre todos os pares desses vértices utilizando o algoritmo de Dijkstra, etapa que permite determinar o custo de conexão entre eles e viabiliza a construção do emparelhamento mínimo.

A resolução do problema de emparelhamento foi feita, neste estudo, por força bruta, enumerando todas as combinações possíveis e selecionando a de menor custo. Apesar da complexidade exponencial desta abordagem, ela se mostra adequada para instâncias pequenas e tem a vantagem de fornecer a solução ótima. Para grafos maiores, poderia ser utilizado o algoritmo de Edmonds, proposto por Edmonds (1965), que resolve o emparelhamento mínimo em tempo polinomial. A partir do emparelhamento ótimo obtido, adicionam-se ao grafo original os caminhos mínimos entre os vértices emparelhados, resultando em um multigrafo euleriano. Segundo Hierholzer (1873), esse processo garante que todos os vértices passem a ter grau par, assegurando a existência de um circuito euleriano.

A implementação foi realizada em Python 3.x com uso das bibliotecas NetworkX (Hagberg *et al.*, 2008), para a manipulação de grafos, Matplotlib (Hunter, 2007), para a visualização gráfica, e NumPy (Harris *et al.*, 2020), para operações numéricas eficientes. Para avaliar a qualidade da solução, foram definidas métricas específicas: o custo adicional representado pelas arestas duplicadas, o aumento percentual no peso total do grafo, o número de arestas duplicadas e o comprimento do circuito euleriano final. Tais métricas permitem analisar de forma objetiva a eficiência da solução encontrada e fornecem uma base para comparações com outras abordagens ou instâncias do problema.

O código-fonte está disponível para download através do link: https://github.com/vitor-souza-ime/carteiro.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

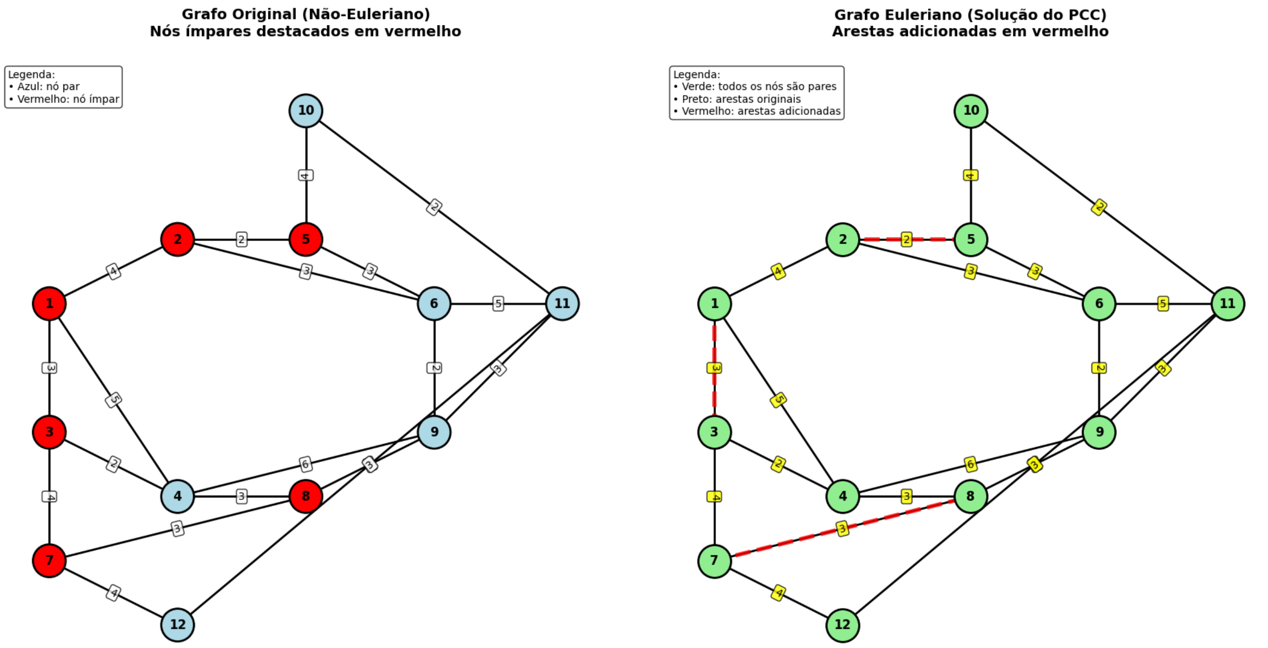
A análise inicial do grafo exemplo revelou que ele possui 12 vértices e 19 arestas, totalizando peso 63. A distribuição dos graus mostrou 6 vértices pares (4, 6, 9, 10, 11, 12) e 6 ímpares (1, 2, 3, 5, 7, 8), configurando um caso mínimo de grafo não-euleriano não-trivial. Conforme West (2001), o número de vértices ímpares em qualquer grafo deve ser par, e este cenário intermediário evidencia bem os benefícios do algoritmo proposto. A conectividade foi confirmada, requisito essencial para a existência de circuitos eulerianos (Bollobás, 1998).

O cálculo das distâncias mínimas entre os 6 vértices ímpares resultou em 15 pares, com valores variando de 2 unidades (2-5) a 10 unidades (2-7 e 5-7). Essa heterogeneidade é vital para a eficiência do emparelhamento, pois permite identificar combinações de menor custo (Christofides, 1973). Observou-se ainda que muitos caminhos utilizam vértices pares intermediários, confirmando a influência da topologia do grafo na eficiência dos algoritmos de roteamento, como discutido por Corberán e Laporte (2014).

A aplicação do algoritmo de emparelhamento mínimo identificou como solução ótima os pares (1,3), (2,5) e (7,8), com custo total de 8 unidades. Comparativamente, esta solução foi 37,5% mais econômica que a pior combinação possível, reforçando a importância da otimização matemática no PCC (Edmonds, 1965). Destaca-se que o emparelhamento ótimo aproveitou duas conexões diretas e uma já existente no grafo, sugerindo que a estrutura original já favorecia soluções eficientes, algo comum em redes urbanas reais.

Com a adição das arestas (1,3), (2,5) e (7,8), o grafo foi transformado em um multigrafo euleriano, confirmando-se que todos os vértices passaram a ter grau par, conforme o teorema de Euler. O aumento de peso foi de 12,7%, um resultado bastante eficiente, corroborando as observações de Eroglu e Azizoğlu (2018) sobre grafos urbanos favorecerem boas soluções do PCC. O circuito euleriano obtido pelo algoritmo de Hierholzer percorreu 22 arestas (19 originais e 3 duplicadas), totalizando 71 unidades, contra 63 do grafo original. Esse aumento corresponde ao custo mínimo necessário para garantir a cobertura total, implicando na duplicação estratégica de três ruas, fenômeno já identificado por Guan (1962) como característico da solução ótima do PCC. A Figura 1 apresenta o resultado obtido com o programa em teste.

Figura 1 - Grafo original e com solução usando PCC



Fonte: O autor.

A comparação com estratégias alternativas mostrou que combinações não otimizadas resultariam em custos muito maiores. O pior emparelhamento, por exemplo, teria um custo adicional de 13 unidades, cerca de 63% acima da solução ótima. Isso confirma a relevância da otimização algorítmica, já ressaltada por Letchford e Oukil (2009), que demonstraram ganhos substanciais em aplicações reais de roteamento urbano. A visualização gráfica reforçou os resultados: vértices ímpares foram destacados em vermelho no grafo original, e a transformação euleriana mostrou todos os vértices em verde, com as arestas duplicadas em tracejado. Como aponta Hunter (2007), representações visuais auxiliam fortemente na compreensão de algoritmos complexos e aqui permitem identificar claramente quais ruas precisam ser percorridas duas vezes.

Por fim, a análise computacional demonstrou que o tempo de execução foi inferior a 1 segundo no grafo de teste, confirmando a viabilidade prática do método para problemas de porte moderado. A biblioteca NetworkX mostrou-se eficiente, aproveitando implementações otimizadas de algoritmos clássicos (Hagberg *et al.*, 2008). Para instâncias maiores, entretanto, seria recomendável a aplicação do algoritmo do Edmonds (Edmonds, 1965), que garante solução ótima em tempo polinomial, ampliando a escalabilidade da abordagem.

CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou uma implementação computacional do Problema do Carteiro Chinês, demonstrando a aplicabilidade prática dos algoritmos clássicos de otimização em grafos para problemas reais de roteamento urbano. A metodologia desenvolvida conseguiu transformar com sucesso um grafo não-euleriano de 12 vértices em um grafo euleriano otimizado, com um aumento de custo de apenas 12,7%.

Os resultados obtidos confirmam a eficácia teórica dos algoritmos propostos por Edmonds e Johnson (1973) e Christofides (1973), demonstrando que a abordagem baseada em emparelhamento mínimo de vértices ímpares produz soluções de alta qualidade para instâncias práticas do problema. O emparelhamento ótimo identificado [(1,3), (2,5), (7,8)] com custo total de 8 unidades representa uma solução superior às alternativas não-otimizadas.

A implementação computacional utilizando Python e NetworkX mostrou-se robusta e eficiente, proporcionando não apenas a solução algorítmica do problema, mas também ferramentas de visualização que facilitam a compreensão e validação dos resultados. A representação gráfica comparativa entre o grafo original e o grafo euleriano resultante oferece insights valiosos para aplicações práticas em planejamento urbano e logística.

Do ponto de vista da contribuição científica, este trabalho demonstra como ferramentas computacionais modernas podem ser efetivamente utilizadas para implementar e validar algoritmos clássicos da teoria dos grafos. A metodologia apresentada pode ser facilmente adaptada para problemas de maior escala ou com características específicas de aplicações reais.

As métricas de desempenho obtidas, particularmente o baixo aumento percentual de custo e a eficiência computacional, indicam que a abordagem proposta é viável para implementação em sistemas reais de otimização de rotas. Isso é especialmente relevante considerando as crescentes demandas por eficiência em sistemas urbanos de distribuição e coleta.

Para trabalhos futuros, recomenda-se a extensão da metodologia para grafos direcionados (Problema do Carteiro Chinês Direcionado), a incorporação de restrições de capacidade e tempo, e a avaliação da performance em instâncias de grande escala utilizando algoritmos polinomiais para o problema de emparelhamento. Adicionalmente, seria valioso investigar a aplicação da metodologia em cenários reais de coleta urbana e distribuição postal.

A pesquisa desenvolvida contribui para o avanço do conhecimento na área de otimização combinatória aplicada, oferecendo uma ferramenta prática e educacional para o estudo e aplicação do Problema do Carteiro Chinês. Os resultados obtidos demonstram a relevância contínua deste problema clássico e sua aplicabilidade em contextos contemporâneos de otimização urbana.

REFERÊNCIAS

BOLLOBÁS, B. Modern Graph Theory. New York: Springer-Verlag, 1998.

CHRISTOFIDES, N. The optimum traversal of a graph. Omega, v. 1, n. 6, p. 719-732, 1973.

CORBERÁN, Á.; LAPORTE, G. Arc Routing: Problems, Methods, and Applications. Philadelphia: SIAM, 2014.

EDMONDS, J. Paths, trees, and flowers. Canadian Journal of Mathematics, v. 17, p. 449-467, 1965.

EDMONDS, J.; JOHNSON, E. L. Matching, Euler tours and the Chinese postman. Mathematical Programming, v. 5, n. 1, p. 88-124, 1973.

FLEISCHNER, H. Eulerian Graphs and Related Topics. Amsterdam: North-Holland, 1990.

GUAN, M. Graphic programming using odd or even points. Chinese Mathematics, v. 1, p. 273-277, 1962.

HAGBERG, A.; SWART, P.; CHULT, D. S. Exploring network structure, dynamics, and function using NetworkX. In: PROCEEDINGS OF THE 7TH PYTHON IN SCIENCE CONFERENCE, 2008, Pasadena. Proceedings... Pasadena: SciPy, 2008. p. 11-15.

HARRIS, C. R.; MILLMAN, K. J.; VAN DER WALT, S. J.; GOMMERS, R.; VIRTANEN, P.; COURNAPEAU, D.; WIESER, E.; TAYLOR, J.; BERG, S.; SMITH, N. J. Array programming with NumPy. Nature, v. 585, n. 7825, p. 357-362, 2020.

HIERHOLZER, C. Über die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechung zu umfahren. Mathematische Annalen, v. 6, n. 1, p. 30-32, 1873.

HUNTER, J. D. Matplotlib: A 2D graphics environment. Computing in Science & Engineering, v. 9, n. 3, p. 90-95, 2007.

LETCHFORD, A. N.; OUKIL, A. Exploiting sparsity in pricing routines for the capacitated arc routing problem. Computers & Operations Research, v. 36, n. 7, p. 2320-2327, 2009.

WEST, D. B. Introduction to Graph Theory. 2nd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2001.

EROGLU, Ezgi; AZIZOĞLU, Meral. Exact solution approaches for the directed bi-objective chinese postman problem. 2018.