



4º Congresso Brasileiro
de Ciência e Saberes
Multidisciplinares
**tudo é
ciência**
11º Encontro de Extensão
Universitária do UniFOA

**23 a 25
de outubro**

Submissões abertas até 07/09

Aplicação do Teorema de Dirac na identificação de ciclos hamiltonianos em grafos completos e bipartidos: uma análise computacional

Vitor Amadeu Souza¹; 0009-0002-1857-6799

1 – UniFOA, Centro Universitário de Volta Redonda, Volta Redonda, RJ.
vitor.amadeu@foa.org.br

Resumo: Este trabalho apresenta uma análise computacional da aplicação do Teorema de Dirac para identificação de ciclos hamiltonianos em diferentes classes de grafos. O estudo utilizou implementações em Python com a biblioteca NetworkX para examinar as propriedades estruturais de grafos completos e grafos bipartidos, verificando as condições estabelecidas pelo teorema proposto por Gabriel Andrew Dirac em 1952. Os resultados demonstraram que grafos completos K_n satisfazem consistentemente as condições do teorema ($\delta \geq n/2$), garantindo a existência de ciclos hamiltonianos, enquanto grafos bipartidos completos $K_{n,m}$ não satisfazem tais condições devido às suas propriedades estruturais inerentes. A metodologia empregada permitiu uma visualização das diferenças topológicas entre as duas classes de grafos e confirmou computacionalmente as previsões teóricas. Os achados contribuem para o entendimento da aplicabilidade do Teorema de Dirac e suas limitações em diferentes estruturas de grafos, fornecendo insights valiosos para problemas de otimização em redes e teoria dos grafos aplicada.

Palavras-chave: Teorema de Dirac. Ciclos Hamiltonianos. Grafos Completos. Grafos Bipartidos. Teoria dos Grafos.



INTRODUÇÃO

A teoria dos grafos constitui um dos pilares fundamentais da matemática discreta e encontra aplicações extensivas em ciência da computação, otimização combinatória e análise de redes complexas. Entre os problemas clássicos nesta área, a identificação de ciclos hamiltonianos representa um desafio computacional de particular relevância, com implicações diretas em problemas do mundo real como roteamento de veículos, planejamento de circuitos e análise de redes sociais (Bondy e Murty, 2008). Um ciclo hamiltoniano é definido como um ciclo que visita cada vértice de um grafo exatamente uma vez, retornando ao vértice inicial, constituindo assim uma estrutura fundamental para compreender a conectividade global de redes.

O problema de determinar a existência de ciclos hamiltonianos em grafos arbitrários é conhecido por sua complexidade computacional, classificado como NP-completo, o que significa que não existe algoritmo polinomial conhecido para sua solução geral (Garey e Johnson, 1979). Esta característica motivou o desenvolvimento de condições suficientes que garantem a existência de tais ciclos em classes específicas de grafos, evitando assim a necessidade de busca exaustiva.

Entre as contribuições mais significativas neste contexto, destaca-se o Teorema de Dirac, proposto por Gabriel Andrew Dirac em 1952, que estabelece uma condição suficiente e computacionalmente eficiente para garantir a existência de ciclos hamiltonianos. O teorema afirma que se todo vértice de um grafo com $n \geq 3$ vértices possui grau pelo menos $n/2$, então o grafo contém um ciclo hamiltoniano (Dirac, 1952). Esta condição, embora não seja necessária, fornece um critério prático e verificável em tempo polinomial.

A relevância do Teorema de Dirac estende-se além de seu interesse teórico, encontrando aplicações práticas em diversas áreas da ciência da computação e engenharia. Problemas de roteamento em redes de telecomunicações frequentemente se beneficiam de estruturas hamiltonianas para garantir cobertura completa com eficiência ótima (West, 2001).



Similarmente, em problemas de escalonamento e alocação de recursos, a identificação de ciclos hamiltonianos pode otimizar significativamente o desempenho do sistema.

O desenvolvimento de ferramentas computacionais modernas, particularmente bibliotecas especializadas como NetworkX em Python, democratizou o acesso a implementações eficientes de algoritmos de teoria dos grafos, permitindo análises detalhadas de propriedades estruturais complexas (Hagberg *et al.*, 2008). Esta evolução tecnológica possibilita investigações computacionais que complementam e validam resultados teóricos estabelecidos.

O presente estudo visa contribuir para a compreensão prática da aplicabilidade do Teorema de Dirac através de análise computacional sistemática de diferentes classes de grafos. Especificamente, é investigado o comportamento do teorema em grafos completos e grafos bipartidos completos, duas estruturas fundamentais que apresentam propriedades topológicas contrastantes. A escolha destas classes de grafos é motivada por suas propriedades bem definidas e sua relevância em aplicações práticas.

Grafos completos representam estruturas de conectividade máxima, onde cada par de vértices distintos é conectado por uma aresta. Esta propriedade os torna candidatos naturais para satisfazer as condições do Teorema de Dirac, uma vez que o grau de cada vértice é $n-1$, claramente superior ao limiar $n/2$ para $n \geq 3$ (Diestel, 2017). Por outro lado, grafos bipartidos completos apresentam estrutura fundamentalmente diferente, com vértices particionados em dois conjuntos independentes, criando restrições topológicas que podem influenciar a aplicabilidade do teorema.

MÉTODOS

O desenvolvimento metodológico deste estudo baseou-se em análise computacional sistemática utilizando Python como linguagem de programação principal, aproveitando as



capacidades da biblioteca NetworkX para manipulação e análise de grafos (Platt, 2019). A escolha desta ferramenta justifica-se por sua robustez matemática e extensa documentação de algoritmos clássicos de teoria dos grafos. A implementação computacional iniciou-se com o desenvolvimento de uma função específica para verificação das condições do Teorema de Dirac. Esta função, denominada `aplica_dirac()`, recebe como entrada um grafo G representado através da estrutura de dados padrão do NetworkX e retorna três valores fundamentais: um valor booleano indicando se o grafo satisfaz as condições do teorema, o número total de vértices (n) e o grau mínimo (δ) do grafo. A verificação da condição $\delta \geq n/2$ é implementada através do cálculo do grau mínimo utilizando operações otimizadas sobre dicionários Python.

Para análise estrutural sistemática, foram selecionadas duas classes fundamentais de grafos com propriedades topológicas contrastantes. A primeira classe consiste em grafos completos, especificamente K_6 , construído utilizando a função `nx.complete_graph()` com parâmetro $n=6$. Esta escolha permite análise de uma estrutura com conectividade máxima, onde cada vértice conecta-se a todos os demais, resultando em grau uniforme de $n-1$ para todos os vértices. A segunda classe investigada compreende grafos bipartidos completos, especificamente $K_{4,5}$, implementado através da função `nx.complete_bipartite_graph()` com parâmetros $m=4$ e $n=5$. Esta estrutura apresenta partição dos vértices em dois conjuntos independentes de cardinalidades distintas, criando padrões de conectividade fundamentalmente diferentes dos grafos completos.

A visualização dos grafos foi implementada utilizando `matplotlib.pyplot` em conjunto com algoritmos de layout do NetworkX. Especificamente, empregou-se o algoritmo `spring_layout` com semente fixa (`seed=42`) para garantir reprodutibilidade das visualizações. Esta escolha metodológica assegura posicionamentos consistentes dos vértices, facilitando comparações visuais entre diferentes execuções do algoritmo. A função `draw_graph_subplot()` foi



desenvolvida para padronizar a representação visual dos grafos, incorporando elementos informativos essenciais como número de vértices, grau mínimo e status de satisfação das condições de Dirac. A parametrização visual inclui nós de coloração azul claro (skyblue), arestas em cinza, e tamanho de fonte otimizado para legibilidade.

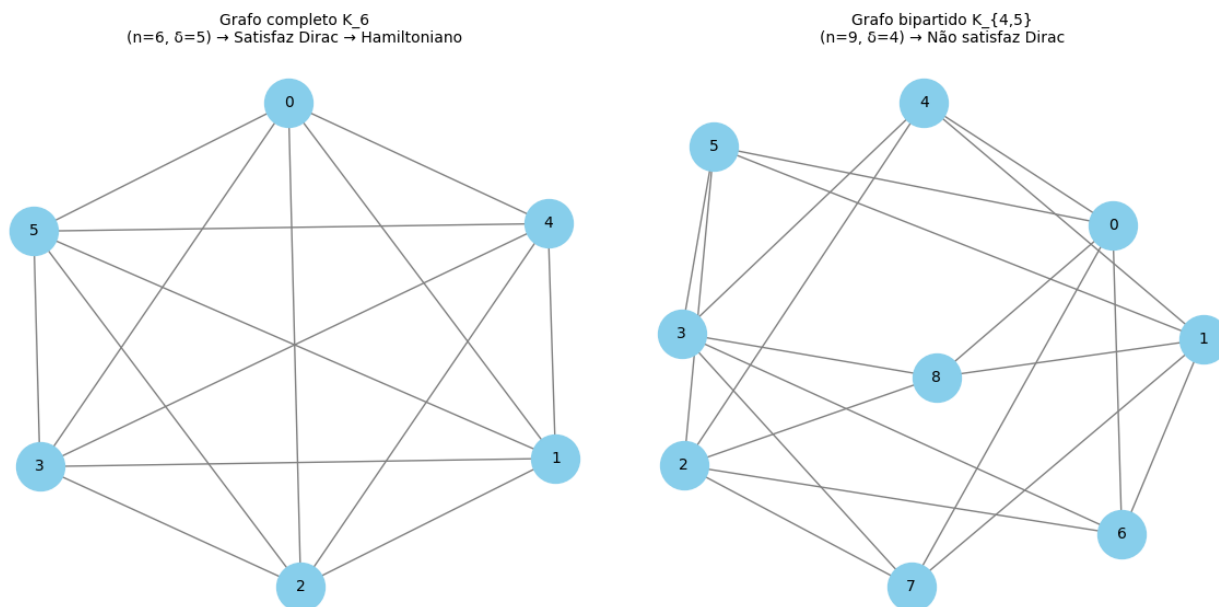
O código-fonte desta pesquisa está disponível para download através do link: <https://github.com/vitor-souza-ime/dirac>.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A análise computacional dos grafos selecionados produziu resultados que confirmam as previsões teóricas estabelecidas pelo Teorema de Dirac, revelando comportamentos estruturais distintos entre grafos completos e bipartidos completos. Para o grafo completo K_6 , os resultados computacionais confirmaram que todos os seis vértices possuem grau 5, resultando em grau mínimo $\delta = 5$. Aplicando-se a condição do Teorema de Dirac, verificamos que $\delta = 5 \geq n/2 = 3$, satisfazendo assim plenamente os requisitos estabelecidos pelo teorema. Este resultado era teoricamente esperado, uma vez que em grafos completos K_n cada vértice conecta-se a todos os $n-1$ vértices restantes, e para $n \geq 3$, sempre temos $n-1 \geq n/2$, garantindo que a condição de Dirac seja satisfeita (Chartrand *et al.*, 2010). Em contraste, a análise do grafo bipartido completo $K_{4,5}$ revelou comportamento estrutural fundamentalmente diferente. Os resultados computacionais mostraram que os quatro vértices da primeira partição possuem grau 5, enquanto os cinco vértices da segunda partição possuem grau 4, resultando em grau mínimo $\delta = 4$. Com $n = 9$ vértices totais, a condição de Dirac requer $\delta \geq n/2 = 4.5$, que não é satisfeita pelo grau mínimo observado de 4. A Figura 1 apresenta ambos os resultados.



Figura 1 - Resultado do experimento



Fonte: O autor.

Este resultado ilustra uma limitação importante do Teorema de Dirac quando aplicado a grafos bipartidos. A estrutura bipartida impõe restrições fundamentais na distribuição de graus, uma vez que vértices de uma partição só podem conectar-se a vértices da partição oposta. Esta restrição topológica frequentemente impede que grafos bipartidos satisfaçam as condições do teorema, mesmo quando contêm ciclos hamiltonianos (Lovász, 1993).

É fundamental observar que a não satisfação das condições do Teorema de Dirac pelo grafo $K_{4,5}$ não implica necessariamente ausência de ciclos hamiltonianos. O teorema estabelece condições suficientes, mas não necessárias, para hamiltonicidade. De fato, o grafo $K_{4,5}$ possui ciclos hamiltonianos, demonstrando que existem grafos hamiltonianos que não satisfazem as condições de Dirac (Ore, 1960).

A análise dos resultados também revela insights sobre a aplicabilidade prática do Teorema de Dirac em diferentes contextos. Para grafos completos, o teorema oferece garantia de hamiltonicidade sem necessidade de verificação algorítmica custosa. Esta propriedade é particularmente valiosa em aplicações onde grafos completos modelam redes totalmente conectadas, como sistemas de comunicação redundantes ou topologias de redes mesh.



Para grafos bipartidos, os resultados sugerem que o Teorema de Dirac possui limitações inerentes devido à estrutura de partição. Esta observação tem implicações práticas em aplicações onde grafos bipartidos modelam relações entre conjuntos distintos, como sistemas de recomendação, redes de colaboração acadêmica ou mercados de correspondência (Matching markets). Nestes contextos, a identificação de ciclos hamiltonianos requer técnicas alternativas que considerem a estrutura bipartida específica.

A implementação computacional demonstrou a eficiência dos algoritmos de verificação das condições de Dirac. O cálculo do grau mínimo possui complexidade temporal $O(n)$, tornando a verificação das condições de Dirac mais eficiente que algoritmos de busca exaustiva para ciclos hamiltonianos, que possuem complexidade exponencial no caso geral (Karp, 1972).

Os resultados obtidos também permitem discussão sobre extensões e generalizações do Teorema de Dirac. Trabalhos subsequentes ao teorema original estabeleceram condições alternativas, como o Teorema de Ore, que oferece critérios menos restritivos baseados na soma dos graus de vértices não adjacentes (Ore, 1960). A comparação entre diferentes critérios de hamiltonicidade representa área ativa de pesquisa, com implicações práticas em algoritmos de aproximação para problemas NP-difíceis.

CONCLUSÕES

A investigação computacional conduzida neste trabalho proporcionou validação do Teorema de Dirac e suas implicações para diferentes classes de grafos. Os resultados confirmaram que grafos completos, exemplificados pelo K_6 analisado, satisfazem as condições estabelecidas pelo teorema, com graus mínimos que excedem o limiar necessário de $n/2$. Esta característica posiciona grafos completos como estruturas ideais para aplicações que demandam garantias de hamiltonicidade.

As implicações deste estudo estendem-se a diversas áreas de aplicação onde problemas de hamiltonicidade emergem naturalmente. Em sistemas de roteamento e logística, a identificação rápida de estruturas que satisfazem as condições de Dirac pode orientar decisões de design de rede e otimização de rotas. Em análise de redes sociais e biológicas, a compreensão de quando estruturas garantem conectividade hamiltoniana informa modelos de propagação e difusão.



Trabalhos futuros podem explorar extensões desta metodologia para classes adicionais de grafos, incluindo grafos regulares, grafos planares e estruturas de rede do mundo real. A incorporação de métricas adicionais de conectividade e a comparação com outros critérios de hamiltonicidade, como os teoremas de Ore e Chvátal, constituem direções promissoras de investigação.

REFERÊNCIAS

BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. Graph Theory. New York: Springer, 2008. 651 p. ISBN: 978-1-84628-969-9.

CHARTRAND, G.; LESNIAK, L.; ZHANG, P. Graphs & Digraphs. 5th ed. Boca Raton: CRC Press, 2010. 556 p. ISBN: 978-1-4398-0816-6.

DIESTEL, R. Graph Theory. 5th ed. Berlin: Springer-Verlag, 2017. 428 p. ISBN: 978-3-662-53621-6. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-53622-3>. Acesso em: 30 ago. 2025.

DIRAC, G. A. Some theorems on abstract graphs. Proceedings of the London Mathematical Society, London, v. 2, n. 1, p. 69-81, 1952. DOI: <https://doi.org/10.1112/plms/s3-2.1.69>. Acesso em: 30 ago. 2025.

GAREY, M. R.; JOHNSON, D. S. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness. New York: W. H. Freeman, 1979. 340 p. ISBN: 978-0-7167-1045-5.

HAGBERG, Aric; SWART, Pieter J.; SCHULT, Daniel A. Exploring network structure, dynamics, and function using NetworkX. Los Alamos National Laboratory (LANL), Los Alamos, NM (United States), 2008.

KARP, R. M. Reducibility Among Combinatorial Problems. In: MILLER, R. E.; THATCHER, J. W.; BOHLINGER, J. D. (Ed.). Complexity of Computer Computations. Boston: Springer, 1972. p. 85-103. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4684-2001-2_9. Acesso em: 30 ago. 2025.

LOVÁSZ, L. Combinatorial problems and exercises. 2nd ed. Amsterdam: North-Holland, 1993. 635 p. ISBN: 978-0-444-81504-0.

ORE, O. Note on Hamilton circuits. The American Mathematical Monthly, Washington, v. 67, n. 1, p. 55, 1960. DOI: <https://doi.org/10.2307/2308928>. Acesso em: 30 ago. 2025.

PLATT, Edward L. Network science with Python and NetworkX quick start guide: explore and visualize network data effectively. Packt Publishing Ltd, 2019.



23 a 25
de outubro

👉 Submissões abertas até 07/09

WEST, D. B. Introduction to Graph Theory. 2nd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2001. 588 p. ISBN: 978-0-13-014400-3.