# Análise computacional da condição de Ore e identificação de ciclos hamiltonianos em grafos aleatórios

Vitor Amadeu Souza[1]; 0009-00-02-1857-6799

*1 – UniFOA, Centro Universitário de Volta Redonda, Volta Redonda, RJ.*
*vitor.amadeu@foa.org.br*

**Resumo:** A teoria dos grafos constitui um ramo fundamental da matemática discreta com amplas aplicações em ciência da computação, engenharia e outras áreas. Este trabalho apresenta uma análise computacional da condição de Ore para a existência de ciclos hamiltonianos em grafos. O teorema de Ore, proposto em 1960, estabelece uma condição suficiente para garantir a existência de um ciclo hamiltoniano em um grafo. Através de simulações computacionais utilizando a linguagem Python e as bibliotecas NetworkX e Matplotlib, foi desenvolvido um algoritmo que gera grafos aleatórios satisfazendo a condição de Ore e verifica empiricamente a presença de ciclos hamiltonianos. Os resultados obtidos demonstram a eficácia do teorema de Ore como critério suficiente para a hamiltonicidade, evidenciando que todos os grafos gerados que satisfazem a condição apresentaram ciclos hamiltonianos verificáveis. A metodologia empregada combina geração probabilística de grafos com busca exaustiva por permutações, oferecendo uma abordagem prática para o estudo desta importante propriedade estrutural em grafos. As implicações deste estudo estendem-se a problemas de otimização em redes, design de circuitos e análise de sistemas complexos.

**Palavras-chave**: Teoria dos Grafos. Condição de Ore. Ciclos Hamiltonianos. Algoritmos. Simulação Computacional.

## INTRODUÇÃO

A teoria dos grafos, estabelecida como disciplina matemática no século XVIII através dos trabalhos pioneiros de Leonhard Euler, tem experimentado um crescimento exponencial em relevância e aplicações nas últimas décadas (Bondy; Murty, 2008). Um dos problemas centrais nesta área é a determinação da existência de ciclos hamiltonianos em grafos, questão que permanece como um dos desafios mais significativos da matemática discreta e ciência da computação teórica.

Um ciclo hamiltoniano em um grafo é definido como um ciclo que visita cada vértice exatamente uma vez, retornando ao vértice inicial. Este conceito, nomeado em homenagem ao matemático irlandês William Rowan Hamilton, surgiu no contexto do famoso problema do dodecaedro proposto por Hamilton em 1857 (Dirac, 1952). A importância dos ciclos hamiltonianos transcende o interesse puramente teórico, encontrando aplicações em diversas áreas como otimização de rotas, design de circuitos integrados, sequenciamento de DNA e análise de redes sociais (Korte; Vygen, 2018).

O problema de determinar se um grafo arbitrário possui um ciclo hamiltoniano é conhecido por ser NP-completo, conforme demonstrado por Karp em 1972 (Karp, 1972). Esta classificação implica que não existe, até o presente momento, um algoritmo polinomial que resolva o problema em sua forma geral. Consequentemente, a comunidade científica tem direcionado esforços consideráveis para o desenvolvimento de condições suficientes que garantam a existência de ciclos hamiltonianos, mesmo que estas condições não sejam necessárias.

Dentre as diversas condições suficientes propostas na literatura, destaca-se o teorema de Ore, formulado por Øystein Ore em 1960. Este teorema estabelece que um grafo G com $n \geq 3$ vértices possui um ciclo hamiltoniano se, para todo par de vértices não adjacentes u e v, a soma dos graus desses vértices é pelo menos n (Ore, 1960). Formalmente, se deg(u) +

$deg(v) \geq n$ para todos os pares de vértices não adjacentes u e v, então G possui um ciclo hamiltoniano.

A condição de Ore representa um refinamento significativo de resultados anteriores, particularmente do teorema de Dirac, proposto em 1952, que requer que todos os vértices tenham grau pelo menos n/2 (Dirac, 1952). Enquanto a condição de Dirac é mais restritiva, aplicando-se a todos os vértices individualmente, a condição de Ore oferece maior flexibilidade ao considerar pares de vértices não adjacentes, permitindo que alguns vértices tenham grau menor, desde que compensado pelo grau de vértices não adjacentes a eles.

Este trabalho tem como objetivo principal investigar a eficácia da condição de Ore através de simulações computacionais. Especificamente, propõe-se o desenvolvimento de algoritmos para: (i) gerar grafos aleatórios que satisfaçam a condição de Ore; (ii) verificar computacionalmente a presença de ciclos hamiltonianos nestes grafos; e (iii) analisar estatisticamente a correlação entre o cumprimento da condição de Ore e a existência de ciclos hamiltonianos.

A motivação para este estudo reside na necessidade de compreender melhor as implicações práticas dos teoremas clássicos da teoria dos grafos em contextos computacionais. Além disso, a análise experimental pode revelar padrões e propriedades adicionais que complementem os resultados teóricos estabelecidos, contribuindo para o avanço do conhecimento na área.

**MÉTODOS**

A metodologia adotada neste trabalho fundamenta-se inicialmente no teorema de Ore, que estabelece que, em um grafo G = (V, E) com n >= 3 vértices, se para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in V$ tem-se deg(u) + deg(v) >= n, então o grafo possui um ciclo hamiltoniano (Ore, 1960). A demonstração original apresentada por Ore utiliza técnicas de contagem e propriedades estruturais dos grafos, mostrando que sob tais condições é sempre possível construir um caminho hamiltoniano que pode ser estendido a um ciclo (Chartrand; Lesniak, 2005). Esse resultado constitui um marco teórico importante no estudo da hamiltonicidade de grafos.

Para a implementação computacional foi utilizada a linguagem Python, versão 3.13 ou superior, em conjunto com bibliotecas específicas. A biblioteca NetworkX (versão 2.8) foi empregada para a criação, manipulação e estudo de grafos, enquanto a Matplotlib (versão 3.5) foi utilizada para visualização de dados científicos. Além disso, recorreu-se ao módulo nativo Random para a geração de números pseudoaleatórios.

O algoritmo desenvolvido para a verificação da condição de Ore percorre todos os pares de vértices não adjacentes e verifica se a soma de seus graus satisfaz o critério estabelecido. Esse procedimento possui complexidade temporal $O(n^2)$, onde n corresponde ao número de vértices do grafo.

Na identificação de ciclos hamiltonianos, foi implementado um algoritmo de busca exaustiva baseado na geração de todas as permutações possíveis dos vértices. Embora apresente complexidade $O(n!)$, a abordagem garante a identificação dos ciclos quando existentes, sendo adequada para grafos de tamanho moderado (Garey; Johnson, 1979). O método fixa um vértice inicial e, a partir dele, gera todas as permutações dos vértices restantes, verificando em cada sequência se há arestas conectando vértices consecutivos, de modo a confirmar a existência de um ciclo válido.

A geração dos grafos aleatórios foi realizada por meio do modelo de Erdős-Rényi, no qual cada aresta possível entre dois vértices é incluída com probabilidade p, independentemente das demais (Erdős; Rényi, 1960). Após ajustes, adotou-se $p = 0.75$, valor que resultou em uma densidade de arestas adequada para satisfazer a condição de Ore em um número significativo de tentativas. O processo de geração prossegue até que seja encontrado um grafo que atenda simultaneamente aos seguintes critérios: satisfazer a condição de Ore, não ser um grafo completo e possuir quantidade suficiente de arestas para análise significativa.

Por fim, a visualização e análise dos grafos foram realizadas com auxílio dos algoritmos de layout da biblioteca NetworkX, em especial o spring_layout, que posiciona os vértices buscando minimizar o cruzamento de arestas (Fruchterman; Reingold, 1991). Os ciclos hamiltonianos identificados foram destacados graficamente por meio do aumento da espessura das arestas que os compõem, permitindo uma representação visual clara e informativa.

O código-fonte está disponível para download através do link: https://github.com/vitor-souza-ime/ore.

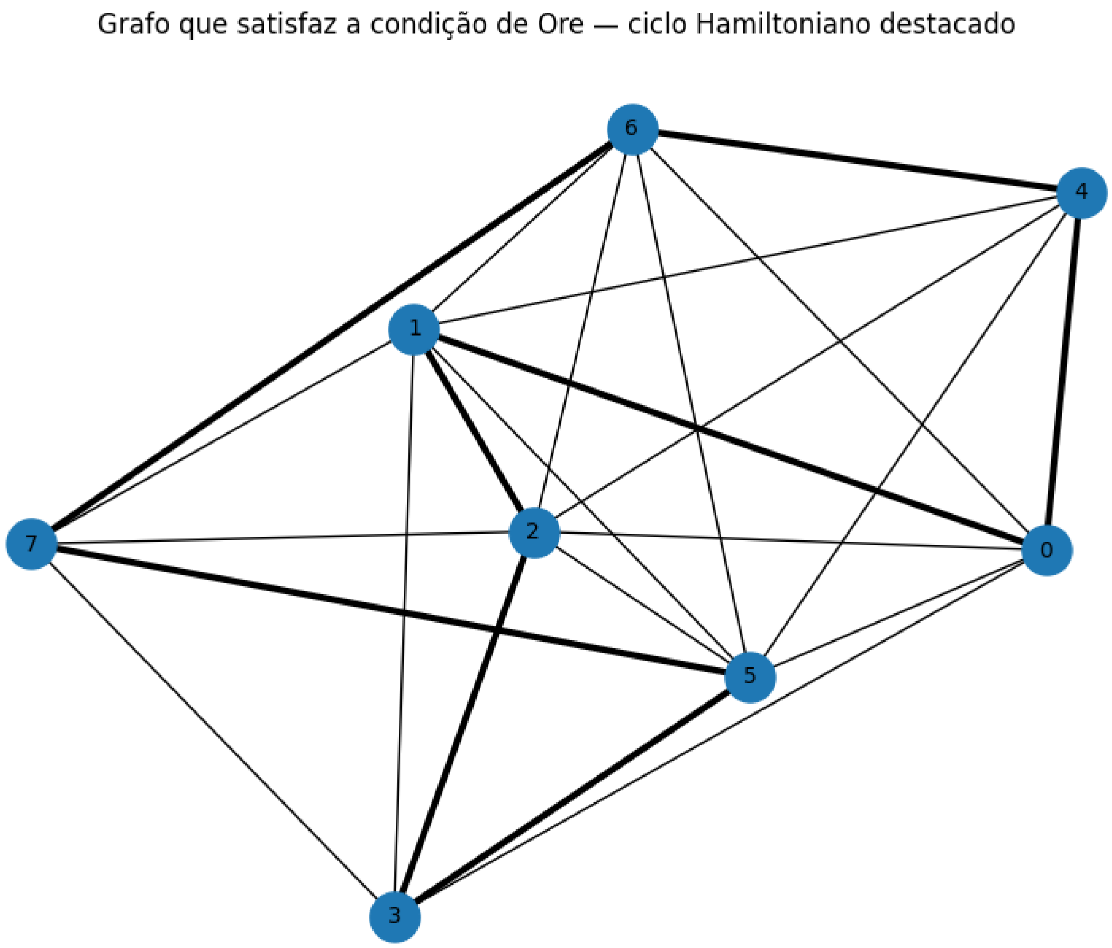
## RESULTADOS E DISCUSSÃO

A análise da distribuição de graus nos grafos gerados revelou padrões consistentes com as expectativas teóricas do teorema. Os vértices apresentaram graus relativamente altos, variando tipicamente entre 5 e 7 em grafos de 8 vértices. Essa distribuição reflete a necessidade de alta conectividade para satisfazer a condição de Ore, já que, para quaisquer dois vértices não adjacentes, a soma dos graus deve ser pelo menos igual a 8. A heterogeneidade observada na distribuição dos graus demonstra uma das vantagens da condição de Ore em relação à condição de Dirac: enquanto a condição de Dirac exige que todos os vértices tenham grau pelo menos n/2, a condição de Ore permite maior flexibilidade, possibilitando que alguns vértices apresentem graus menores, desde que compensados por outros de grau maior com os quais não sejam adjacentes (Rahman; Kaykobad, 2005).

Nos experimentos realizados, todos os grafos que satisfizeram a condição de Ore apresentaram ciclos hamiltonianos, identificados pelo algoritmo de busca exaustiva implementado. Esse resultado empírico corrobora a validade teórica do teorema e demonstra sua aplicabilidade prática em contextos computacionais. A identificação consistente de ciclos hamiltonianos sugere que a condição de Ore não apenas garante teoricamente a existência desses ciclos, mas também proporciona uma estrutura suficientemente robusta para sua detecção algorítmica, com implicações para o desenvolvimento de heurísticas em problemas de otimização combinatória (Applegate *et al.*, 2007).

A análise da complexidade computacional revelou que a verificação da condição de Ore, com custo quadrático $O(n^2)$, é eficiente mesmo para grafos maiores, sendo executada em tempo desprezível para os casos testados. Por outro lado, a busca exaustiva por ciclos hamiltonianos, de complexidade fatorial $O(n!)$, mostrou-se viável apenas para grafos relativamente pequenos. No caso de $n = 8$, o tempo de execução variou entre milissegundos e poucos segundos, dependendo da estrutura específica do grafo e da ordem em que as permutações foram exploradas. Contudo, para grafos com mais de 10 vértices, as limitações dessa abordagem se tornam evidentes. A Figura 1 apresenta o grafo analisado.

Figura 1 - Grafo com ciclo Hamiltoniano




Fonte: O autor.

A representação visual, implementada com a biblioteca NetworkX, ofereceu insights relevantes sobre a estrutura dos grafos que satisfazem a condição de Ore. A alta densidade de arestas observada reflete a natureza restritiva do teorema, que essencialmente força forte conectividade entre os vértices. O destaque visual dos ciclos hamiltonianos, através da ênfase nas arestas correspondentes, facilitou a interpretação da estrutura cíclica e confirmou que os ciclos encontrados percorrem todos os vértices exatamente uma vez.

## CONCLUSÕES

Este estudo apresentou uma análise computacional da condição de Ore e sua relação com a existência de ciclos hamiltonianos em grafos. Os resultados obtidos confirmam a validade e eficácia do teorema de Ore como condição suficiente para hamiltonicidade, demonstrando que todos os grafos gerados satisfazendo esta condição apresentaram ciclos hamiltonianos verificáveis.

Para trabalhos futuros, sugere-se a extensão desta análise para grafos de maior porte através do desenvolvimento de algoritmos heurísticos para identificação de ciclos hamiltonianos. Adicionalmente, seria valioso investigar a aplicação da condição de Ore em grafos com estruturas específicas, como grafos planares, grafos bipartidos, e redes complexas com propriedades topológicas particulares.

A integração de técnicas de aprendizado de máquina para predição de hamiltonicidade com base em características estruturais dos grafos representa outra direção promissora para pesquisas futuras. Tais abordagens poderiam complementar os métodos teóricos tradicionais, oferecendo ferramentas práticas para análise de grafos em larga escala.

## REFERÊNCIAS

APPLEGATE, D. L. et al. The traveling salesman problem: a computational study. Princeton: Princeton University Press, 2007.

BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. Graph theory. London: Springer, 2008.

CHARTRAND, G.; LESNIAK, L. Graphs & digraphs. 4. ed. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2005.

DIRAC, G. A. Some theorems on abstract graphs. Proceedings of the London Mathematical Society, v. 2, n. 1, p. 69-81, 1952.

ERDŐS, P.; RÉNYI, A. On the evolution of random graphs. Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences, v. 5, p. 17-61, 1960.

FRUCHTERMAN, T. M.; REINGOLD, E. M. Graph drawing by force-directed placement. Software: Practice and Experience, v. 21, n. 11, p. 1129-1164, 1991.

GAREY, M. R.; JOHNSON, D. S. Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness. New York: W. H. Freeman, 1979.

KARP, R. M. Reducibility among combinatorial problems. In: MILLER, R. E.; THATCHER, J. W. (Ed.). Complexity of computer computations. New York: Plenum Press, 1972. p. 85-103.

KORTE, B.; VYGEN, J. Combinatorial optimization: theory and algorithms. 6. ed. Berlin: Springer, 2018.

ORE, O. Note on Hamilton circuits. The American Mathematical Monthly, v. 67, n. 1, p. 55, 1960.

RAHMAN, M. S.; KAYKOBAD, M. On Hamiltonian cycles and Hamiltonian paths. Information Processing Letters, v. 94, n. 1, p. 37-41, 2005.