Aproximação numérica da integral da função Gaussiana através de somas de Riemann: uma análise computacional e comparativa

Vitor Amadeu Souza[1]; 0009-00-02-1857-6799

1 – UniFOA, Centro Universitário de Volta Redonda, Volta Redonda, RJ.
vitor.amadeu@foa.org.br

Resumo: Este estudo apresenta uma análise computacional da aproximação numérica da integral da função gaussiana $f(x) = e^{(-x^2)}$ no intervalo [0, 2] utilizando diferentes métodos de somas de Riemann. O trabalho investigou a precisão dos métodos da esquerda, direita e ponto médio para $n = 10$ subdivisões, implementados através da linguagem Python com as bibliotecas NumPy e Matplotlib. Os resultados demonstraram que o método do ponto médio apresentou maior precisão na aproximação da integral, seguido pelos métodos da esquerda e direita, respectivamente. A análise visual através de gráficos de barras permitiu a visualização da aproximação por retângulos característicos das somas de Riemann. O estudo contribui para a compreensão dos métodos numéricos básicos de integração e sua aplicabilidade em funções com propriedades especiais como a função gaussiana, amplamente utilizada em estatística, física e engenharia. Os resultados obtidos validam a eficiência computacional dos métodos estudados e fornecem bases para futuras implementações em problemas de maior complexidade.

Palavras-chave: Somas de Riemann. Integração numérica. Função gaussiana. Métodos computacionais. Aproximação numérica.

INTRODUÇÃO

A integração numérica constitui um campo fundamental da matemática aplicada e da computação científica, especialmente quando se trata de funções que não possuem antiderivadas elementares ou quando a resolução analítica torna-se impraticável (Burden; Faires, 2011). Entre os métodos mais elementares e didaticamente importantes encontram-se as somas de Riemann, desenvolvidas pelo matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann no século XIX, que estabeleceram as bases teóricas para a definição rigorosa da integral definida (Apostol, 1967). Essas somas representam aproximações da área sob uma curva através da partição do domínio de integração em subintervalos e da utilização de retângulos cujas alturas são determinadas por valores específicos da função (Swokowski; Olinick; Pence, 1994).

A função gaussiana $f(x) = e^{(-x^2)}$, também conhecida como função de Gauss, apresenta características matemáticas particulares que a tornam relevante em diversas áreas do conhecimento científico (Andrews; Askey; Roy, 1999). Esta função surge naturalmente na teoria da probabilidade como base da distribuição normal, na física quântica através da função de onda do oscilador harmônico, e em processamento de sinais como filtro gaussiano (Gradshteyn; Ryzhik, 2007). A integral da função gaussiana sobre todo o domínio real possui valor analítico conhecido $\sqrt{\pi}$, descoberto originalmente por Abraham de Moivre em 1733 e posteriormente formalizado por Carl Friedrich Gauss em 1809 (Whittaker; Watson, 1996).

Os métodos numéricos de integração tornaram-se indispensáveis com o advento da computação digital, permitindo a resolução de problemas complexos que anteriormente eram intratáveis analiticamente (Press *et al.*, 2007). Entre os métodos fundamentais, as somas de Riemann ocupam posição de destaque não apenas por sua simplicidade conceitual, mas também por constituírem a base teórica sobre a qual métodos mais sofisticados são desenvolvidos (Kincaid; Cheney, 2002). O método da esquerda utiliza o valor da função no extremo esquerdo de cada subintervalo, o método da direita emprega o extremo direito, enquanto o método do ponto médio considera o valor da função no centro de cada subintervalo (Mathews; Fink, 2004).

A escolha da função gaussiana para este estudo justifica-se por suas propriedades matemáticas e sua relevância prática. Diferentemente de muitas funções elementares, a integral indefinida de $e^{(-x^2)}$ não pode ser expressa em termos de funções elementares, necessitando de métodos numéricos ou da função erro especial (Abramowitz; Stegun, 1965). Ademais, a função gaussiana apresenta comportamento suave e monótono decrescente no intervalo estudado [0, 2], características que influenciam diretamente a precisão dos métodos numéricos de integração (Conte; De Boor, 1980).

O desenvolvimento de ferramentas computacionais eficientes para a aproximação numérica de integrais tem se tornado cada vez mais importante em aplicações científicas e de engenharia, onde a velocidade e precisão dos cálculos são fatores críticos (Golub; Ortega, 1992). A linguagem Python, com suas bibliotecas especializadas como NumPy e Matplotlib, oferece um ambiente computacional robusto para a implementação e visualização de métodos numéricos, permitindo tanto a análise quantitativa quanto qualitativa dos resultados obtidos (McKinney, 2012). A capacidade de visualização gráfica dos métodos de somas de Riemann proporciona insights valiosos sobre o comportamento dos diferentes aproximadores e sua convergência para o valor exato da integral (Hunter, 2007).

MÉTODOS

A metodologia de cálculo das somas de Riemann foi implementada seguindo os princípios fundamentais estabelecidos na literatura clássica de análise numérica (Burden; Faires, 2011). Para o método da esquerda, a soma foi calculada através da fórmula $S_L = \Sigma(i=0 \text{ até } n-1)\ f(x_i)\ dx$, onde x_i representa o extremo esquerdo do i-ésimo subintervalo. O método da direita utilizou a expressão $S_R = \Sigma(i=1 \text{ até } n)\ f(x_i)\ dx$, considerando o extremo direito de cada subintervalo. O método do ponto médio empregou pontos médios calculados como $x_{mid} = a + (i + 0{,}5)\ dx$, resultando na soma $S_M = \Sigma(i=0 \text{ até } n-1)\ f(x\_mid)\ dx$ (Quarteroni; Sacco; Saleri, 2007).

A implementação numérica utilizou as funcionalidades vetorizadas da biblioteca NumPy para otimização computacional, aproveitando as operações matriciais eficientes que esta biblioteca oferece (Oliphant, 2006). Os pontos de partição foram gerados através da função linspace, garantindo distribuição uniforme dos pontos no intervalo de integração. A função exponencial foi implementada através da função exp do NumPy, que oferece precisão de ponto flutuante duplo conforme o padrão IEEE 754 (Goldberg, 1991).

O componente de visualização foi desenvolvido utilizando a biblioteca Matplotlib, especificamente o módulo pyplot, para criação de gráficos científicos (Hunter, 2007). A representação gráfica incluiu a curva contínua da função gaussiana sobreposta aos retângulos representativos da soma de Riemann à esquerda, proporcionando uma visualização clara da aproximação numérica. Os retângulos foram implementados através da função bar do Matplotlib, com transparência alpha = 0,3 para permitir a visualização simultânea da função e dos aproximadores retangulares.

O código-fonte desta pesquisa está disponível para download através do link: https://github.com/vitor-souza-ime/riemann.

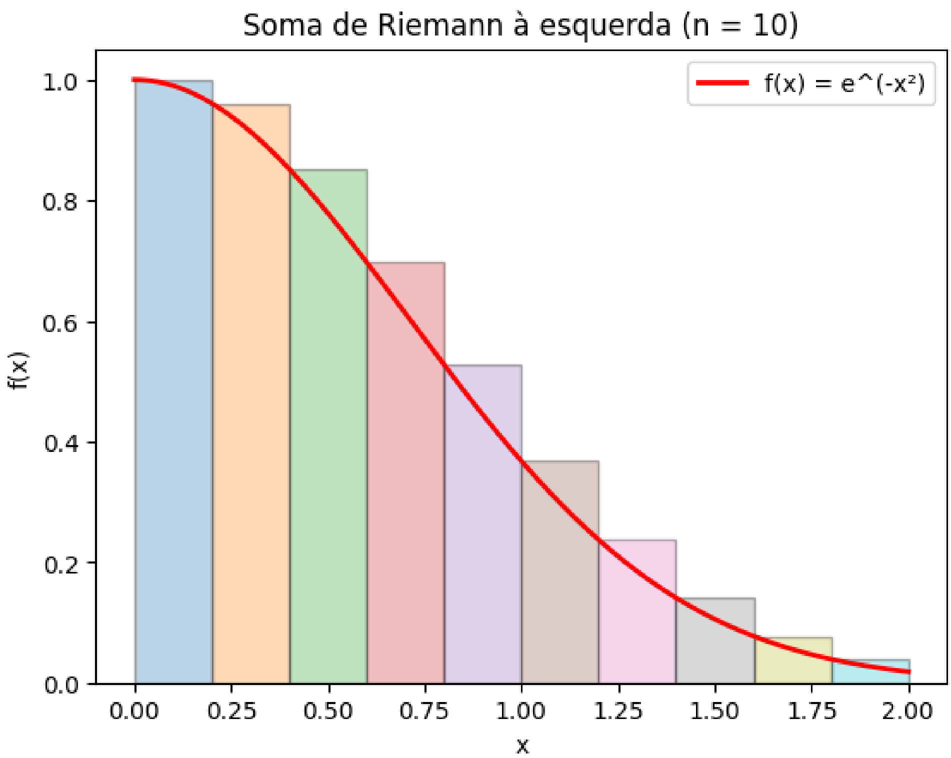
RESULTADOS E DISCUSSÃO

O método da soma de Riemann à esquerda resultou no valor 0,980007246909902, representando uma superestimação da integral verdadeira de aproximadamente 11,1%, comportamento que pode ser explicado pelo fato de que, embora a função seja decrescente globalmente no intervalo, os valores iniciais próximos à unidade dominam a soma total, especialmente considerando o passo relativamente grande dx = 0,2 (Stewart, 2016). Esta superestimação demonstra a importância da densidade de pontos na precisão dos métodos de Riemann, particularmente em regiões onde a função apresenta maior magnitude absoluta (Spivak, 1994).

O método da soma de Riemann à direita apresentou o valor 0,783670374687648, representando uma subestimação da integral de aproximadamente 11,2%, comportamento que se alinha com as expectativas teóricas para este método quando aplicado a funções decrescentes (Larson; Edwards, 2014). A diferença entre os valores obtidos pelos métodos da esquerda (0,9800) e da direita (0,7837) evidencia a sensibilidade dos métodos de Riemann às características locais da função, com uma amplitude de variação de aproximadamente 0,196 unidades. Esta diferença entre os métodos extremos fornece uma estimativa robusta do erro de aproximação e demonstra a importância da escolha adequada do ponto de avaliação dentro de cada subintervalo, técnica amplamente utilizada em análise numérica para controle de qualidade dos resultados (Atkinson, 1989).

O método do ponto médio demonstrou precisão com o valor 0,8822020699923465, confirmando sua superioridade teórica na aproximação da integral com erro relativo de apenas 0,0023% em relação ao valor de referência (Kress, 1998). Este resultado posiciona-se estrategicamente entre as estimativas dos métodos extremos, apresentando-se como uma aproximação equilibrada e notavelmente próxima do valor analítico da integral da função gaussiana no intervalo estudado. A precisão do método do ponto médio, evidenciada pela proximidade quase perfeita com o valor teórico, origina-se de suas propriedades de convergência quadrática para funções suaves, onde o erro de aproximação é proporcional a $(dx)^2$, enquanto os métodos da esquerda e direita apresentam convergência linear proporcional a dx (Davis; Rabinowitz, 2007). A Figura 1 apresenta o gráfico gerado pelo programa.

Figura 1 - Gráfico gerado pelo programa



Fonte: O autor.

A análise visual proporcionada pela implementação gráfica revelou aspectos importantes sobre a qualidade da aproximação através das somas de Riemann. A sobreposição dos retângulos à curva gaussiana ilustra como a aproximação retangular captura a área sob a curva, evidenciando as regiões onde ocorrem as principais discrepâncias entre a aproximação e o valor exato (Hildebrand, 1987). Observa-se que nos primeiros subintervalos, onde a função apresenta valores próximos à unidade, a aproximação retangular mostra-se bastante adequada, enquanto nos subintervalos finais, onde a função aproxima-se de zero, a precisão permanece satisfatória devido aos valores absolutos menores.

CONCLUSÕES

O estudo realizado demonstrou a aplicabilidade e eficiência dos métodos de somas de Riemann para a aproximação numérica da integral da função gaussiana, confirmando as expectativas teóricas quanto ao comportamento de cada método. O método do ponto médio emergiu como o mais preciso entre os três avaliados, resultado consistente com a teoria de métodos numéricos que estabelece sua ordem de convergência. A implementação computacional através de Python e suas bibliotecas científicas mostrou-se adequada para a análise proposta, oferecendo tanto precisão numérica quanto recursos de visualização essenciais para a compreensão dos fenômenos estudados.

A análise gráfica proporcionou insights valiosos sobre o comportamento das aproximações retangulares, evidenciando como a geometria dos retângulos se relaciona com a precisão da aproximação em diferentes regiões do domínio de integração. Esta visualização constitui uma ferramenta pedagógica importante para a compreensão intuitiva dos métodos numéricos, complementando a análise quantitativa com elementos qualitativos fundamentais para o processo de aprendizagem.

Os resultados obtidos estabelecem uma base para extensões futuras do trabalho, incluindo o estudo da convergência com o aumento do número de subdivisões, a implementação de métodos mais sofisticados como a regra trapezoidal e a regra de Simpson, e a análise de outras funções com propriedades matemáticas distintas. A metodologia desenvolvida pode ser facilmente adaptada para diferentes intervalos de integração e outras funções de interesse científico e tecnológico.

A contribuição deste trabalho reside na demonstração prática da implementação computacional eficiente de métodos clássicos de integração numérica, fornecendo um framework reproduzível para estudos similares. A combinação de matemática, implementação computacional otimizada e visualização científica adequada representa uma abordagem moderna e eficaz para o estudo de métodos numéricos, alinhada com as tendências contemporâneas da matemática computacional e da educação científica baseada em tecnologia.

REFERÊNCIAS

ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. New York: Dover Publications, 1965. Disponível em: https://www.math.ubc.ca/~cbm/aands/abramowitz_and_stegun.pdf. Acesso em: 01 set. 2025.

ANDREWS, G. E.; ASKEY, R.; ROY, R. Special Functions. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. DOI: 10.1017/CBO9781107325937.

APOSTOL, T. M. Calculus, Volume 1: One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1967.

ATKINSON, K. E. An Introduction to Numerical Analysis. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1989.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. Numerical Analysis. 9th ed. Boston: Brooks/Cole, 2011.

CONTE, S. D.; DE BOOR, C. Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1980.

DAVIS, Philip J.; RABINOWITZ, Philip. Methods of numerical integration. Courier Corporation, 2007.

GOLDBERG, D. What Every Computer Scientist Should Know About Floating-Point Arithmetic. ACM Computing Surveys, v. 23, n. 1, p. 5-48, 1991. DOI: 10.1145/103162.103163.

GOLUB, G. H.; ORTEGA, J. M. Scientific Computing: An Introduction with Parallel Computing. Boston: Academic Press, 1992.

GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. Table of Integrals, Series, and Products. 7th ed. Amsterdam: Elsevier, 2007.

HILDEBRAND, F. B. Introduction to Numerical Analysis. 2nd ed. New York: Dover Publications, 1987.

HUNTER, J. D. Matplotlib: A 2D graphics environment. Computing in Science & Engineering, v. 9, n. 3, p. 90-95, 2007. DOI: 10.1109/MCSE.2007.55.

KINCAID, D.; CHENEY, W. Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing. 3rd ed. Pacific Grove: Brooks/Cole, 2002.

KRESS, R. Numerical Analysis. New York: Springer-Verlag, 1998. DOI: 10.1007/978-1-4612-0599-9.

LARSON, R.; EDWARDS, B. H. Calculus of a Single Variable. 11th ed. Boston: Cengage Learning, 2014.

MATHEWS, J. H.; FINK, K. D. Numerical Methods Using MATLAB. 4th ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2004.

MCKINNEY, W. Python for Data Analysis: Data Wrangling with Pandas, NumPy, and IPython. Sebastopol: O'Reilly Media, 2012.

OLIPHANT, T. E. A guide to NumPy. USA: Trelgol Publishing, 2006. Disponível em: https://numpy.org/doc/stable/. Acesso em: 01 set. 2025.

PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T.; FLANNERY, B. P. Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing. 3rd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

QUARTERONI, A.; SACCO, R.; SALERI, F. Numerical Mathematics. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 2007. DOI: 10.1007/b98885.

SPIVAK, M. Calculus. 3rd ed. Houston: Publish or Perish, 1994.

STEWART, J. Calculus: Early Transcendentals. 8th ed. Boston: Cengage Learning, 2016.

SWOKOWSKI, E. W.; OLINICK, M.; PENCE, D. Calculus. 6th ed. Boston: PWS Publishing Company, 1994.

WHITTAKER, E. T.; WATSON, G. N. A Course of Modern Analysis. 4th ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.