Análise computacional do problema das sete pontes de Königsberg: uma abordagem utilizando teoria de grafos e algoritmos de Euler

Vitor Amadeu Souza[1]; 0009-0002-1857-6799

1 – UniFOA, Centro Universitário de Volta Redonda, Volta Redonda, RJ.
vitor.amadeu@foa.org.br

Resumo: O presente trabalho apresenta uma análise computacional do clássico problema das sete pontes de Königsberg, utilizando teoria de grafos e implementação em Python com a biblioteca NetworkX. O problema, historicamente considerado o marco inicial da teoria de grafos moderna, foi modelado como um multigrafo não-direcionado onde os vértices representam as regiões geográficas da cidade e as arestas representam as pontes. Através da aplicação dos critérios de Euler para caminhos e circuitos eulerianos, verificou-se computacionalmente a impossibilidade de percorrer todas as sete pontes exatamente uma vez, confirmando a solução histórica proposta por Leonhard Euler em 1736. O algoritmo implementado determinou que o grafo possui quatro vértices de grau ímpar (L: grau 5, T: grau 3, B: grau 3, R: grau 3), violando a condição necessária para a existência de trilhas eulerianas. Os resultados obtidos demonstram a eficácia da abordagem matemática de Euler, validando computacionalmente sua demonstração teórica e evidenciando a relevância contemporânea dos fundamentos da teoria de grafos em problemas de otimização de rotas e análise de redes.

Palavras-chave: Teoria de grafos. Problema de Königsberg. Caminhos eulerianos. Análise computacional. NetworkX.

INTRODUÇÃO

O problema das sete pontes de Königsberg representa um marco fundamental na história da matemática, estabelecendo os alicerces da moderna teoria de grafos através do trabalho pioneiro de Leonhard Euler em 1736 (Euler, 1741; Wilson, 1996). A cidade prussiana de Königsberg, atual Kaliningrado, era atravessada pelo rio Pregel, formando duas ilhas conectadas ao continente por sete pontes distintas. O desafio proposto aos habitantes consistia em determinar se seria possível realizar um passeio que percorresse cada uma das sete pontes exatamente uma vez, retornando ao ponto de partida.

A genialidade da solução euleriana residiu na abstração do problema geográfico concreto em uma estrutura matemática abstrata, transformando as regiões da cidade em vértices e as pontes em arestas de um grafo (Biggs *et al.*, 1976). Esta abordagem revolucionária demonstrou que a solução do problema não dependia das características físicas específicas das pontes ou das distâncias envolvidas, mas exclusivamente da topologia das conexões entre as regiões.

Segundo Hopkins e Wilson (2004), Euler estabeleceu o primeiro teorema da teoria de grafos ao demonstrar que um grafo conexo possui um circuito euleriano se e somente se todos os seus vértices possuem grau par. Esta descoberta não apenas resolveu o problema específico de Königsberg, mas estabeleceu princípios fundamentais que encontram aplicações contemporâneas em áreas diversas como otimização de rotas, análise de redes sociais, bioinformática e ciência da computação (Bollobás, 1998).

A relevância contemporânea do problema de Königsberg transcende seu valor histórico, encontrando aplicações práticas em problemas modernos de otimização. Conforme destacado por Chartrand e Zhang (2012), os conceitos desenvolvidos por Euler são fundamentais para resolver problemas de roteamento de veículos, planejamento de rotas de coleta de lixo, inspeção de redes elétricas e análise de circuitos eletrônicos. A crescente disponibilidade de ferramentas computacionais para análise de grafos, como a biblioteca NetworkX em Python (Hagberg *et al.*, 2008), permite a implementação eficiente e visualização clara destes conceitos clássicos.

O presente estudo objetiva realizar uma análise computacional do problema das sete pontes de Königsberg, utilizando implementação em Python para verificar os resultados teóricos estabelecidos por Euler. Através da modelagem do problema como um multigrafo e aplicação de algoritmos de detecção de caminhos eulerianos, busca-se demonstrar a precisão da abordagem matemática original, ao mesmo tempo em que se explora o potencial das ferramentas computacionais modernas para o ensino e pesquisa em teoria de grafos.

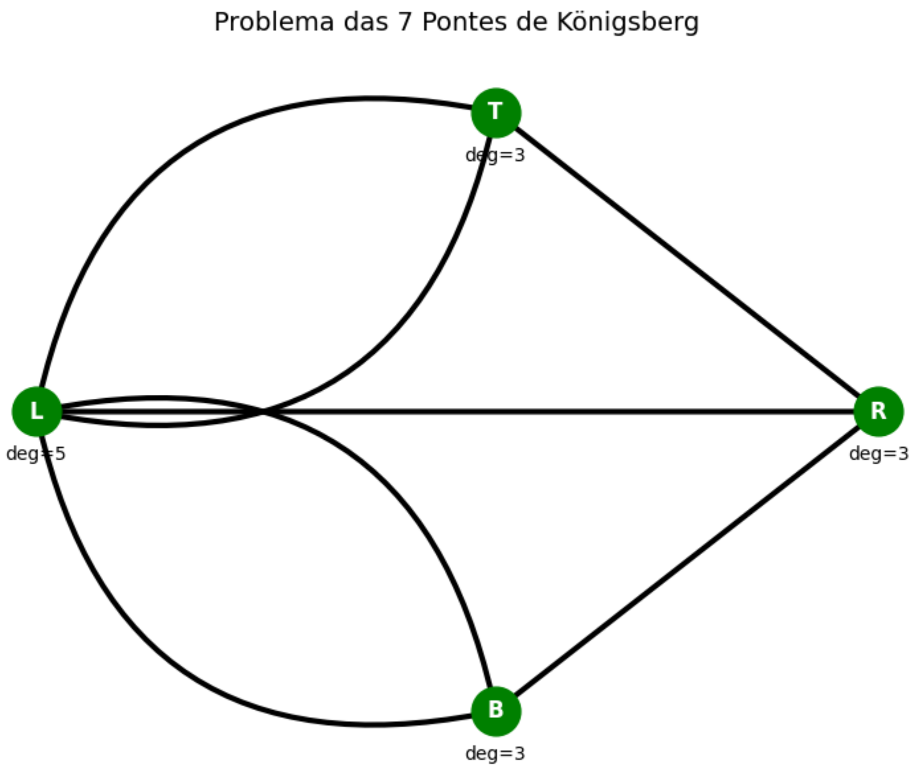
MÉTODOS

A metodologia adotada no presente estudo baseia-se na modelagem computacional do problema das sete pontes de Königsberg utilizando a linguagem de programação Python em conjunto com as bibliotecas NetworkX, Matplotlib e NumPy. A escolha destas ferramentas justifica-se pela robustez do NetworkX para manipulação e análise de grafos (Schult e Swart, 2008), bem como pelas capacidades de visualização oferecidas pelo Matplotlib (Hunter, 2007).

O problema foi modelado como um multigrafo não-direcionado $G = (V, E)$, onde V representa o conjunto de vértices correspondentes às quatro regiões geográficas de Königsberg: L (margem esquerda), T (ilha superior), B (ilha inferior) e R (margem direita). O conjunto de arestas E representa as sete pontes históricas, sendo implementadas como multiarestas para capturar adequadamente a estrutura topológica do problema original. Conforme descrito por West (2001), a utilização de multigrafos é essencial para representar situações onde múltiplas conexões existem entre os mesmos pares de vértices.

A configuração específica das arestas seguiu a disposição histórica das pontes: duas conexões entre L e T, duas conexões entre L e B, uma conexão direta entre L e R, uma conexão entre T e R, e uma conexão entre B e R. Esta configuração resulta nos graus de vértices: $deg(L) = 5$, $deg(T) = 3$, $deg(B) = 3$, $deg(R) = 3$, totalizando 14 semi-arestas conforme esperado para um grafo com 7 arestas. A Figura 1 demonstra o grafo gerado pelo programa, segundo a descrição informada.

Figura 1 - Grafo das 7 Pontes de Königsberg



Fonte: O autor.

A análise da existência de caminhos eulerianos foi implementada seguindo os critérios estabelecidos por Euler e formalizados na literatura moderna (Diestel, 2017). Primeiro, verificou-se a conectividade do grafo utilizando o algoritmo de busca em profundidade implementado no NetworkX. Subsequentemente, calcularam-se os graus de todos os vértices e identificaram-se aqueles com grau ímpar. A classificação final seguiu os critérios clássicos: um grafo conexo é euleriano se todos os vértices possuem grau par, semi-euleriano se exatamente dois vértices possuem grau ímpar, e não-euleriano caso contrário.

Para a visualização do grafo, implementou-se um algoritmo customizado para desenho de arestas múltiplas utilizando arcos com diferentes raios de curvatura. As posições dos vértices foram definidas manualmente para refletir aproximadamente a disposição geográfica original de Königsberg, facilitando a interpretação visual dos resultados. Os graus dos vértices foram exibidos junto aos nós para permitir a verificação dos cálculos teóricos. A validação dos resultados computacionais foi realizada através de comparação direta com os cálculos manuais dos graus dos vértices e verificação da implementação dos critérios de Euler.

O código-fonte está disponível para download através do link: https://github.com/vitor-souza-ime/7pontes.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A implementação computacional do problema das sete pontes de Königsberg produziu resultados que confirmam a solução histórica proposta por Euler. O algoritmo determinou que o multigrafo possui graus de vértices distribuídos da seguinte forma: vértice L com grau 5, vértices T, B e R com grau 3 cada um. Esta distribuição resulta em quatro vértices de grau ímpar, violando fundamentalmente a condição necessária para a existência de trilhas eulerianas estabelecida no teorema de Euler.

A análise de conectividade confirmou que o grafo é conexo quando considerados apenas os vértices com grau positivo, atendendo à condição necessária mas não suficiente para a existência de caminhos eulerianos. Conforme estabelecido por Fleischner (1990), a conectividade é pré-requisito essencial para qualquer discussão sobre trilhas que percorram todas as arestas de um grafo, mas não garante por si só a existência de tais trilhas.

O resultado final da análise classificou o grafo como não-euleriano, confirmando que "não existe caminho nem circuito Euleriano" devido à presença de mais de dois vértices com grau ímpar. Este resultado alinha-se perfeitamente com a demonstração original de Euler e valida computacionalmente sua abordagem teórica. Segundo Lovász (1993), este tipo de validação computacional fortalece a confiança nos resultados teóricos e ilustra a harmonia entre a matemática pura e aplicada.

A visualização gráfica produzida (Figura 1) pelo algoritmo oferece uma representação clara e intuitiva do problema, permitindo verificação visual dos graus dos vértices e da configuração topológica das conexões. As arestas múltiplas foram representadas como arcos com diferentes curvaturas, técnica que resolve eficientemente o problema de sobreposição visual comum em multigrafos (Tamassia, 2013). Esta abordagem visual facilita a compreensão do problema tanto para fins educacionais quanto para pesquisa avançada.

A precisão dos resultados computacionais demonstra a robustez da implementação utilizando NetworkX, confirmando a adequação desta ferramenta para análises de teoria de grafos. Conforme observado por Hagberg *et al*. (2008), a biblioteca NetworkX oferece implementações otimizadas dos algoritmos clássicos de grafos, garantindo tanto eficiência computacional quanto precisão matemática.

Um aspecto particularmente interessante dos resultados é a confirmação de que a impossibilidade da trilha euleriana em Königsberg não resulta de limitações práticas ou físicas, mas de uma impossibilidade matemática fundamental. Esta característica exemplifica a força da abstração matemática em revelar verdades universais que transcendem contextos específicos. Como destacado por Graham *et al.* (1994), problemas como o de Königsberg ilustram como a matemática pode fornecer respostas definitivas a questões aparentemente complexas através de princípios gerais.

CONCLUSÕES

O presente estudo demonstrou a aplicação de ferramentas computacionais modernas na análise e validação do clássico problema das sete pontes de Königsberg, confirmando através de implementação os resultados teóricos estabelecidos por Leonhard Euler há quase três séculos. A modelagem do problema como um multigrafo não-direcionado e a aplicação sistemática dos critérios de Euler para detecção de trilhas eulerianas resultaram na conclusão de que o problema original não possui solução, validando computacionalmente a demonstração histórica.

Os resultados obtidos evidenciam que o grafo de Königsberg possui quatro vértices de grau ímpar, condição que viola fundamentalmente os requisitos para existência de caminhos ou circuitos eulerianos. Esta constatação reafirma a genialidade da abordagem euleriana original e demonstra como princípios matemáticos estabelecidos no século XVIII mantêm sua relevância e aplicabilidade na era da computação moderna.

As implicações dos resultados estendem-se além do valor histórico do problema de Königsberg, demonstrando a aplicabilidade contemporânea dos critérios de Euler em problemas modernos de otimização de rotas, análise de redes e planejamento logístico. A metodologia desenvolvida pode ser facilmente adaptada para analisar problemas similares em contextos urbanos, redes de transporte e sistemas de distribuição.

Futuras pesquisas poderiam explorar extensões do problema original, como a análise de variações com diferentes configurações de pontes, a otimização de rotas que minimizem repetições de arestas, ou a aplicação dos conceitos desenvolvidos a redes complexas contemporâneas. Adicionalmente, a integração de técnicas de visualização interativa e análise de grafos dinâmicos poderia enriquecer ainda mais a compreensão destes problemas clássicos.

REFERÊNCIAS

BIGGS, N.; LLOYD, E. K.; WILSON, R. J. Graph Theory 1736-1936. Oxford: Oxford University Press, 1976.

BOLLOBÁS, B. Modern Graph Theory. New York: Springer-Verlag, 1998.

CHARTRAND, G.; ZHANG, P. A First Course in Graph Theory. Mineola: Dover Publications, 2012.

DIESTEL, R. Graph Theory. 5th ed. Berlin: Springer-Verlag, 2017.

EULER, L. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, v. 8, p. 128-140, 1741. Disponível em: https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/53/. Acesso em: 13 set. 2025.

FLEISCHNER, H. Eulerian Graphs and Related Topics. Amsterdam: North-Holland, 1990.

GRAHAM, R. L.; KNUTH, D. E.; PATASHNIK, O. Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science. 2nd ed. Reading: Addison-Wesley, 1994.

HAGBERG, A.; SWART, P.; CHULT, D. NetworkX: Python software for complex networks. Proceedings of the 7th Python in Science Conference, p. 11-15, 2008. Disponível em: https://networkx.org/documentation/stable/. Acesso em: 13 set. 2025.

HOPKINS, Brian; WILSON, Robin J. The truth about Königsberg. The College Mathematics Journal, v. 35, n. 3, p. 198-207, 2004.

HUNTER, J. D. Matplotlib: A 2D graphics environment. Computing in Science & Engineering, v. 9, n. 3, p. 90-95, 2007. DOI: https://doi.org/10.1109/MCSE.2007.55. Acesso em: 13 set. 2025.

LOVÁSZ, L. Combinatorial Problems and Exercises. 2nd ed. Amsterdam: North-Holland, 1993.

SCHULT, D. A.; SWART, P. Exploring network structure, dynamics, and function using NetworkX. Proceedings of the 7th Python in Science Conference, p. 11-15, 2008. Disponível em: https://conference.scipy.org/proceedings/scipy2008/paper_2/. Acesso em: 13 set. 2025.

TAMASSIA, R. Handbook of Graph Drawing and Visualization. Boca Raton: CRC Press, 2013.

WEST, D. B. Introduction to Graph Theory. 2nd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2001.

WILSON, R. J. Introduction to Graph Theory. 4th ed. London: Longman, 1996.